

52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521041

- a) Bestimmen Sie die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.
- b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller derjenigen 178-stelligen Zahlen, die durch Aneinanderhängen der neunundachtzig zweistelligen Zahlen 11, 12, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

521042

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1 und eine Senkrechte g zur Geraden AC durch A . Auf der Geraden g wird ein Punkt P gewählt und der Strahl h senkrecht zu g durch P so gezeichnet, dass er in der gleichen Halbebene wie C bezüglich g liegt. Auf h wird der Punkt Q so bestimmt, dass die Strecken \overline{CP} und \overline{PQ} gleich lang sind. Die Lotfußpunkte von Q auf die Geraden AB und AD werden mit R bzw. S bezeichnet.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Eckpunkten A, R, Q, S in Abhängigkeit von der Länge der Strecke \overline{AP} !

521043

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$