52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521241

Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die $n^2 + 2^n$ Quadratzahl ist.

521242

Es sei α eine beliebig, aber fest vorgegebene reelle Zahl mit $\alpha > 1$. Die Zahlenfolge (a_n) sei durch

$$a_n = 1 + \sqrt[\alpha]{2 + \sqrt[\alpha]{3 + \sqrt[\alpha]{\cdots + \sqrt[\alpha]{n + \sqrt[\alpha]{n+1}}}}}$$

für alle positiven ganzen Zahlen n definiert.

Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl C gibt, mit der die Ungleichung $a_n < C$ für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt ist.

521243

Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich in zwei Punkten schneiden. Einer der Schnittpunkte sei Q. Der Punkt P liege innerhalb des Kreises k_1 auf dem Kreis k_2. Die Lage des Punktes P sei so gewählt, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die Gerade PQ schneidet den Kreis k_1 in einem von Q verschiedenen Punkt X.
(2) Die Tangente im Punkt X an den Kreis k_1 schneidet den Kreis k_2 in zwei Punkten A und B.

Der Kreis k verlaufe durch die Punkte A und B und berühre die Parallele zur Geraden AB durch den Punkt P.

Man beweise: Der Kreis k berührt den Kreis k_1.