52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521244

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge a und der Strecke $\overline{AG}$ als einer der vier Raumdiagonalen. Unter einem Weg soll ein Kurvenzug verstanden werden, der vollständig auf der Oberfläche des Würfels liegt.

Man bestimme die Menge der Punkte P auf der Oberfläche des Würfels, für die die kürzesten Wege vom Punkt P zum Punkt A und vom Punkt P zum Punkt G die gleiche Länge l haben.

Man bestimme in Abhängigkeit von a, welche Werte l annehmen kann, wenn P ein beliebiger Punkt dieser Menge ist.

521245

Für die Organisation eines Wettbewerbs sollen aus fünf Personen verschiedene Kommissionen gebildet werden. Dabei müssen nachfolgende Regeln eingehalten werden:

(1) Jede Kommission hat mindestens ein Mitglied.
(2) Keine zwei Kommissionen stimmen überein.
(3) Je zwei Kommissionen haben mindestens ein gemeinsames Mitglied.

Bisher wurden bereits 14 Kommissionen gebildet. Man zeige, dass noch eine weitere hinzugefügt werden kann.

521246

Durch die Vorschriften

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 2 \quad \text{und} \quad a_{k+2} = 2a_{k+1} + a_k \quad \text{für alle positiven ganzen Zahlen } k$$

werde eine Folge positiver ganzer Zahlen definiert. Man bestimme alle positiven reellen Zahlen β mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(A) Es gibt unendlich viele Paare positiver ganzer Zahlen (p, q), für die $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < \frac{\beta}{q^2}$ gilt.

(B) Es gibt nur endlich viele Paare (p, q) positiver ganzer Zahlen mit $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < \frac{\beta}{q^2}$, für die es keinen Index k mit $q = a_k$ gibt.