# 53. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulrunde)
## Olympiadeklassen 11 und 12
## Aufgaben



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531211

Man bestimme für alle Tripel $(x,\, y,\, z)$ positiver ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem

$$-10\,(z-2xy)+\frac{y-5}{x}=52\,, \tag{1}$$
$$x-y+z=53\,, \tag{2}$$
$$x\,(y+7)=54 \tag{3}$$

erfüllen, das Produkt $xyz$.

531212

Kalorina verwahrt in ihrem Kühlschrank 2013 Speisen verschiedener Sorten. Von keiner Sorte sind mehr als 183 Stück vorhanden.

Man zeige, dass Kalorina einen Speiseplan für die nächsten 183 Tage erstellen kann, bei dem sie jeden Tag 11 Speisen verschiedener Sorten isst.

531213

Es seien $n \geq 2$ ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, und es sei bekannt, dass jede von ihnen als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann.

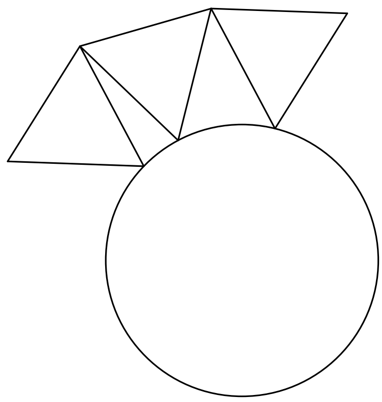
Man zeige, dass dann auch das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ gleich der Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen ist.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

531214

Auf dem Tisch liegt eine Kreisscheibe mit dem Radius 6 cm. Inge möchte von außen möglichst viele gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 6 cm an die Kreisscheibe legen. Dabei möchte sie folgende Bedingungen einhalten:

a) Von jedem Dreieck liegt eine Ecke auf der Peripherie des Kreises.
b) Die Dreiecke überdecken sich nicht.
c) Je zwei aufeinander folgende Dreiecke besitzen genau einen gemeinsamen Eckpunkt, und dieser liegt nicht auf dem Kreis.



A 531214

Die Abbildung A 531214 zeigt ein Beispiel einer Anordnung mit drei angelegten Dreiecken.

Man bestimme, wie viele Dreiecke Inge höchstens an den Kreis legen kann, ohne dass sich Dreiecke überdecken. Man beweise, dass sich bei dieser Anzahl das erste und das letzte Dreieck in Eckpunkten berühren.