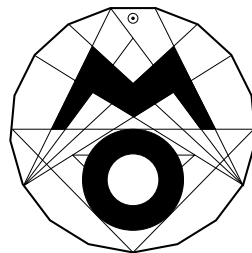


53. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

530721

In der Klausur der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade können maximal 40 Punkte erreicht werden. Paula ist an ihrem Ergebnis sehr interessiert und fragt ihren Mathematik-Lehrer. Dieser antwortet:

- (1) „Ein Teiler deiner Gesamtpunktzahl ist eine Mirpzahl.“
- (2) „Wenn du die Quersumme deiner Gesamtpunktzahl verdoppelst und 7 addierst, erhältst du auch eine Mirpzahl.“

Zeige, dass aus diesen Angaben Paulas Gesamtpunktzahl eindeutig bestimmt werden kann, und gib diese Gesamtpunktzahl an.

Bemerkung: Eine *Mirpzahl* ist eine Primzahl, die eine andere Primzahl ergibt, wenn man die Ziffern von rechts nach links liest. Folglich ist 13 die erste Mirpzahl. Liest man das Wort „mirp“ von rechts nach links, so erhält man das Wort „prim“.

530722

Wir betrachten Zahlen, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

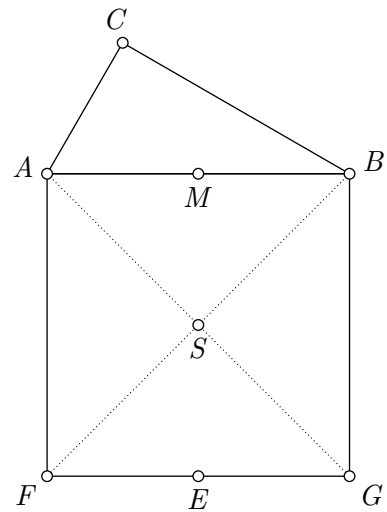
- (1) Jede solche Zahl ist eine sechsstellige positive ganze Zahl.
 - (2) In jeder solchen Zahl tritt jede Ziffer höchstens zweimal auf.
 - (3) In jeder solchen Zahl treten die Ziffern 9, 0, 1, 1 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern auf.
- a) Ermittle die größte und die kleinste dieser Zahlen.
 - b) Ermittle die Anzahl aller dieser Zahlen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

530723

Die Abbildung A 530723 zeigt ein Dreieck ABC und ein unter der Seite \overline{AB} errichtetes Viereck $AFGB$. Es wird vorausgesetzt:

- (1) Der Winkel ACB ist ein rechter Winkel.
 - (2) Die Seite \overline{AB} ist doppelt so lang wie die Seite \overline{AC} .
 - (3) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} .
 - (4) Das Viereck $AFGB$ ist ein Quadrat.
 - (5) Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Seite \overline{FG} .
 - (6) Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $AFGB$.
 - (7) Das Dreieck AMC ist gleichseitig.
- a) Ermittle die Größen der Innenwinkel des Fünfecks $AFESC$.
 - b) Beweise, dass die Aussage (7) aus den Voraussetzungen (1), (2) und (3) folgt.



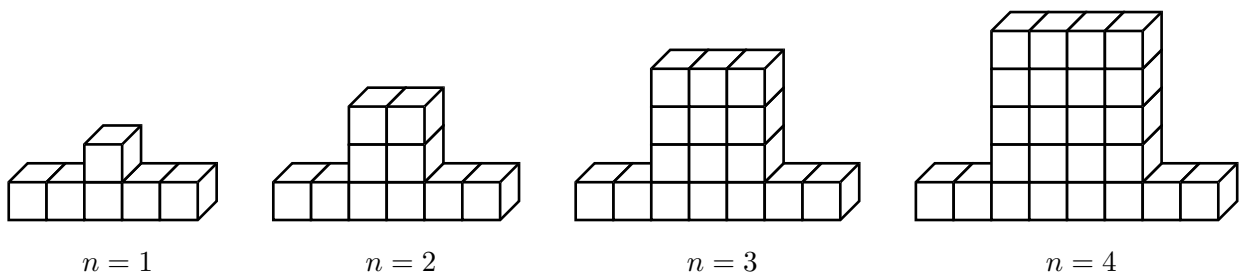
A 530723

Hinweis: Es ist nicht zulässig, Messwerte zum Bestimmen der Winkelgrößen zu verwenden.

530724

Betrachtet wird eine Folge von Figuren, welche aus gleich großen Würfeln zusammengesetzt werden. Siehe hierzu die Abbildung A 530724. Jede Figur besteht aus einem Fundament und dem dazugehörigen Aufbau. Die Vorderansicht des Fundaments ist ein Rechteck, die Vorderansicht des Aufbaus ist ein zugehöriges Quadrat. Das Fundament ist nach links und nach rechts um jeweils genau zwei Würfel länger als der Aufbau. Von einer Figur zur nächsten kommt im Fundament genau ein Würfel hinzu.

Die Anzahl der Würfel der n -ten Figur wird mit w_n bezeichnet. Offenbar gelten $w_1 = 6$ und $w_2 = 10$. Es entsteht so eine aus den Würfelanzahlen gebildete Zahlenfolge w_1, w_2, w_3, \dots



A 530724

- a) Gib die Glieder w_3, w_4, w_5 und w_6 der Zahlenfolge an.
- b) Berechne das hundertste Glied w_{100} der Zahlenfolge. Überlege dir dazu, wie man w_n in Abhängigkeit von n ermitteln kann, und nutze diese Formel für die geforderte Berechnung.
- c) Untersuche, ob 999 ein Glied der Zahlenfolge ist, und begründe deine Feststellung.