53. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

530921

Ein Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 1 wird in drei Rechtecke R_1, R_2 und R_3 mit unterschiedlichen Flächeninhalten zerlegt. Die Flächeninhalte dieser drei Rechtecke werden mit F_1, F_2 und F_3 bezeichnet.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, das Quadrat so zu zerlegen, dass der größte Wert der drei Flächeninhalte viermal so groß wie der kleinste Wert ist und (gleichzeitig) doppelt so groß wie der mittlere Wert der Flächeninhalte.

Kurz, falls F_1 der größte Flächeninhalt und F_3 der kleinste ist, so soll gelten:

$$F_1 : F_2 : F_3 = 4 : 2 : 1 .$$

Geben Sie für jedes der Rechtecke jeweils die Seitenlängen an.

Zwei Zerlegungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Drehen und/oder Spiegeln ineinander überführt werden können.

530922

Zwei Folgen ganzer Zahlen (a_n) und (b_n) sind gegeben durch ihre Bildungsvorschriften

$$a_1 = p,\ a_2 = q \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{ für alle } n > 0$$

bzw.

$$b_1 = p,\ b_2 = q \text{ und } b_{n+2} = b_n - b_{n+1} \text{ für alle } n > 0 .$$

a) Es sei $p = 1$ und $q = 4$. Geben Sie die Folgenglieder a_1 bis a_8 an.

b) Eine Zahlenfolge (x_n) heißt periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl k so gibt, dass für jedes Folgenglied x_n die Beziehung $x_n = x_{n+k}$ gilt. Die Periodenlänge einer periodischen Folge (x_n) ist definiert als die *kleinste* positive ganze Zahl k mit der Eigenschaft, dass $x_n = x_{n+k}$ für jedes Folgenglied x_n gilt.
Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) für beliebige Startwerte p und q stets periodisch ist, und ermitteln Sie alle für (a_n) möglichen Periodenlängen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Ermitteln Sie alle Paare ganzer Zahlen (p, q), für die das Folgenglied b_6 den Wert 0 annimmt.

530923

Karen würfelt mit einem normalen Würfel, der also mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet ist und bei dem jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird. Zunächst würfelt sie einmal und schreibt das Ergebnis als erste Ziffer einer Zahl auf. Im zweiten und in jedem weiteren Schritt würfelt Karen wieder mit diesem Würfel, schreibt das Ergebnis als Ziffer hinter alle bisher notierten Ziffern und prüft, ob die sich ergebende Zahl durch ihre letzte Ziffer teilbar ist. Ist dies der Fall, so hört sie auf. Ansonsten macht sie weiter.

Beispiel einer solchen Wurffolge: 1. Wurf: 5; 2. Wurf: 6 (Karen hat nun die Zahl 56 notiert, da diese Zahl nicht durch 6 teilbar ist, würfelt sie weiter); 3. Wurf: 1 (561 ist durch 1 teilbar, somit hört sie auf zu würfeln). Es wurde also die dreistellige Zahl 561 erwürfelt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Karen bereits nach dem zweiten Wurf abbricht, die entstehende Zahl also zweistellig ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Karen nach genau drei Würfen abbricht, die entstehende Zahl also dreistellig ist.

530924

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und einem Umfang von 18 (Längeneinheiten). Auf dem Kreis sind die (paarweise verschiedenen) Punkte A, B, C, D, E und F in dieser Reihenfolge angeordnet. Die Bögen $\overparen{AB}$, $\overparen{BC}$, $\overparen{DE}$ und $\overparen{EF}$ haben die Längen $\left|\overparen{AB}\right| = 4$, $\left|\overparen{BC}\right| = 3$, $\left|\overparen{DE}\right| = 2$ bzw. $\left|\overparen{EF}\right| = 3$.

a) Beweisen Sie: Wenn auch $\left|\overparen{CD}\right| = 2$ gilt, dann schneiden sich die Geraden AD, BE und CF in einem gemeinsamen Punkt.

b) Für $\left|\overparen{CD}\right| > 2$ sei R der Schnittpunkt von AD und BE, S der Schnittpunkt von AD und CF und T der Schnittpunkt von BE und CF.
Beweisen Sie, dass die Punkte R, S und T paarweise verschieden sind und ein gleichseitiges Dreieck bilden.