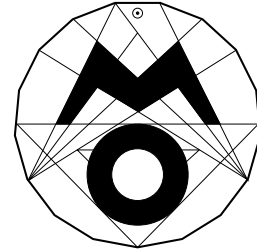


**53. Mathematik-Olympiade**  
**3. Stufe (Landesrunde)**  
**Olympiadeklasse 9**  
**Aufgaben – 1. Tag**



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

530931

Wir untersuchen Folgen  $(a_n)$  natürlicher Zahlen, die für vorgegebene Startwerte  $p, q \in \mathbb{N}$  durch die Bildungsvorschrift

$$a_1 = p, a_2 = q \text{ und } a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} \text{ für } n \geq 1$$

bestimmt sind.

- a) Geben Sie für  $p = 3$  und  $q = 2$  die Folgenglieder  $a_1$  bis  $a_6$  an.

Es seien nun allgemeiner die Startwerte  $p$  und  $q$  zwei voneinander verschiedene Primzahlen.

- b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von  $a_1$  bis  $a_{12}$ .  
c) Weisen Sie nach, dass kein Folgenglied  $a_n$  eine Quadratzahl sein kann.

530932

Karen würfelt mit einem normalen Würfel, der also mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet ist und bei dem jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird. Zunächst würfelt sie einmal und schreibt das Ergebnis als erste Ziffer einer Zahl auf. Im zweiten und in jedem weiteren Schritt würfelt Karen wieder mit diesem Würfel, schreibt das Ergebnis als Ziffer hinter alle bisher notierten Ziffern und prüft, ob die sich ergebende Zahl durch ihre letzte Ziffer teilbar ist. Ist dies der Fall, so hört sie auf. Ansonsten macht sie weiter.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses: Karen würfelt genau siebenmal und hört dann wegen der obigen Abbruchbedingung auf, und bei diesen 7 Würfeln waren die zweite ebenso wie die letzte gewürfelte Ziffer eine Vier.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

530933

In einem konvexen Viereck  $ABCD$  ist die Seite  $\overline{AB}$  durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  und die Seite  $\overline{CD}$  durch die Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  in jeweils drei gleich lange Strecken unterteilt, womit das Viereck in die drei kleineren Vierecke  $AP_1Q_2D$ ,  $P_1P_2Q_1Q_2$  und  $P_2BCQ_1$  zerlegt wird.

Zeigen Sie, dass für die Flächeninhalte stets

$$3 F(P_1P_2Q_1Q_2) = F(ABCD)$$

gilt.

