

53. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

530934

Ein Draht der Länge L wird in zwei Stücke der Längen $l_1 = x$ und $l_2 = L - x$ zerschnitten. Aus dem Teilstück der Länge l_1 wird ein Quadrat gebogen, aus dem Teilstück der Länge l_2 ein Kreis.

- Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte von Quadrat und Kreis in Abhängigkeit von x und L .
- Zeigen Sie: Die Summe der Flächeninhalte von Quadrat und Kreis wird am kleinsten, wenn man den Schnitt so durchführt, dass die Seitenlänge des Quadrats gleich dem Durchmesser des Kreises ist.

530935

Der indische Mathematiker D. R. Kaprekar führte für alle natürlichen Zahlen, die durch ihre eigene Quersumme teilbar sind, den Namen *Harshad-Zahl* ein.

Weisen Sie nach, dass unter 18 aufeinanderfolgenden dreistelligen natürlichen Zahlen stets mindestens eine Harshad-Zahl ist.

530936

Im Raum liegen 53 verschiedene Geraden, die mindestens 1337 verschiedene Schnittpunkte haben.

Beweisen Sie, dass die Geraden alle in einer gemeinsamen Ebene liegen.