53. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag

© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531031

Wir untersuchen Folgen (a_n) natürlicher Zahlen, die für vorgegebene Startwerte $p, q \in \mathbb{N}$ durch die Bildungsvorschrift

$$a_1 = p,\ a_2 = q \text{ und } a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} \text{ für } n \geq 1$$

bestimmt sind.

a) Geben Sie für $p = 3$ und $q = 2$ die Folgenglieder a_1 bis a_6 an.

Es seien nun allgemeiner die Startwerte p und q zwei voneinander verschiedene Primzahlen.

b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von a_1 bis a_{12}.

c) Weisen Sie nach, dass kein Folgenglied a_n eine Quadratzahl sein kann.

531032

Karen würfelt mit einem normalen Würfel, der also mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet ist und bei dem jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird. Zunächst würfelt sie einmal und schreibt das Ergebnis als erste Ziffer einer Zahl auf. Im zweiten und jedem weiteren Schritt würfelt Karen wieder mit diesem Würfel, schreibt das Ergebnis als Ziffer hinter alle bisher notierten Ziffern und prüft, ob die sich ergebende Zahl durch ihre letzte Ziffer teilbar ist. Ist dies der Fall, so hört sie auf. Ansonsten macht sie weiter.

Die natürliche Zahl n sei größer als 6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt folgendes Ereignis ein: Karen würfelt genau n-mal und hört dann wegen der obigen Abbruchbedingung auf, und bei diesen n Würfen waren die zweite ebenso wie die letzte gewürfelte Ziffer eine Vier.

531033

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, bei dem das Dreieck ABD spitzwinklig ist. Die Höhenschnittpunkte der Dreiecke BCD, CDA, DAB und ABC bezeichnen wir mit A', B', C' bzw. D'.

a) Beweisen Sie, dass das Viereck $A'B'C'D'$ ein Parallelogramm ist.

b) Beweisen Sie, dass die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ den gleichen Flächeninhalt haben.