

53. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

531034

Die Kantenlängen eines Quaders seien a, b und c , die Länge jeder seiner Raumdiagonalen d .

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{3} \cdot a b c d \leq (a b)^2 + (a c)^2 + (b c)^2 .$$

Für welche Quader gilt das Gleichheitszeichen?

531035

Der indische Mathematiker D. R. Kaprekar führte für alle natürlichen Zahlen, die durch ihre eigene Quersumme teilbar sind, den Namen *Harshad-Zahl* ein.

Weisen Sie nach, dass unter 18 aufeinanderfolgenden dreistelligen natürlichen Zahlen stets mindestens eine Harshad-Zahl ist.

531036

Im Raum liegen 53 verschiedene Geraden, die mindestens 1337 verschiedene Schnittpunkte haben.

Beweisen Sie, dass die Geraden alle in einer gemeinsamen Ebene liegen.