53. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531234

Für eine beliebige reelle Zahl a sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 7\,y^2 &= 8 - a^2 , \\ x^2 + 10\,y^2 &= 12 - 2\,a^2 , \\ x^2 + 16\,y^2 &= 20 - 4\,a^2 \end{aligned}$$

gegeben.

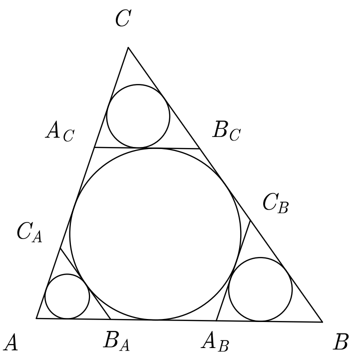
a) Für welche Werte von a existieren Lösungen (x, y) des Gleichungssystems in reellen Zahlen x, y?

b) Man ermittle für jeden dieser Werte a alle Lösungspaare (x, y).

531235

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inkreis k. Der Radius von k sei r. Durch Tangenten an k, die parallel zu den Dreiecksseiten sind, entstehen die Dreiecke AB_AC_A, A_BBC_B und A_CB_CC wie in Abbildung A 531235 gezeigt. Die Radien ihrer Inkreise seien r_a, r_b beziehungsweise r_c.

Man beweise, dass $r_a + r_b + r_c = r$ gilt.



A 531235

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

531236

Man ermittle alle ganzen Zahlen a, b, c, d mit $1 < a < b < c < d$ und der Eigenschaft, dass $abcd - 1$ durch $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$ teilbar ist.