

53. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

530941

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, den Geldbetrag von 1 Euro nur mit Münzen von 1 Cent, 2 Cent oder 5 Cent zu bezahlen? Zwei Möglichkeiten sollen dabei genau dann als verschieden gelten, wenn sie sich in der Anzahl der Münzen mindestens eines Werts unterscheiden.

530942

Für jede positive ganze Zahl n bezeichnen wir mit $Q(n)$ die Quersumme von n .

Bestimmen Sie alle Paare (a, b) verschiedener positiver ganzer Zahlen, für die $a = (Q(b))^2$ und $b = (Q(a))^2$ gilt.

530943

Für ein konvexes Viereck $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten \overline{AD} und \overline{BC} mit M bzw. N bezeichnet. Weiter bezeichne S den Schnittpunkt der Geraden AN und BM und T den Schnittpunkt der Geraden DN und CM .

Zeigen Sie: Gilt $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle DNA| = 90^\circ$, so sind die drei Geraden AD , BC und ST entweder paarweise parallel oder die Geraden AD und BC werden von der Geraden ST unter Winkeln gleicher Größe geschnitten.

Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn nicht benachbarte Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben und alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.