53. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

530944

Gegeben sind eine positive natürliche Zahl z und zwei Zahlenfolgen a_n und b_n mit folgenden Eigenschaften:

$$a_1 = 4\,z,\ b_1 = \frac{1}{4}\,z$$

sowie

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{a_n \cdot b_n}{a_{n+1}} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

a) Beweisen Sie, dass dann stets $a_n + b_n \geq 2\,z$ gilt.
b) Beweisen Sie, dass jedes Folgenglied a_n größer ist als das nächste Glied a_{n+1}.

530945

Im Dreieck ABC sind im Inneren der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt P, im Inneren der Seite $\overline{AC}$ ein Punkt Q und im Inneren der Seite $\overline{AB}$ ein Punkt R so gegeben, dass die Gerade PQ parallel zur Geraden AB verläuft. Weiter führen wir die Bezeichnungen $F(ARQ) = F_1$, $F(BPR) = F_2$ und $F(CQP) = F_3 = x$ für die Flächeninhalte dieser Teildreiecke ein.

Bestimmen Sie eine Formel für $F = F(ABC)$ in Abhängigkeit von x, wenn bekannt ist, dass $F_1 + F_2 = 6\,F_3$ gilt.

530946

Seien positive ganze Zahlen m und n mit $m < n$ so gewählt, dass weder m noch n noch $m+n$ durch 3 teilbar sind. Kann man die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen für jede derartige Wahl von m und n so in unendlich viele Teilmengen zu je drei Zahlen zerlegen, dass in jeder Teilmenge die drei Zahlen die drei Abstände m, n bzw. $m+n$ voneinander haben?

Hinweis: „Zerlegung“ bedeutet, dass jede ganze Zahl in genau einer Teilmenge enthalten sein soll. Die Abstände der drei Zahlen a, b, c sind $|a-b|$, $|a-c|$ und $|b-c|$.