53. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531044

Gegeben sind eine positive natürliche Zahl z und zwei Zahlenfolgen a_n und b_n mit folgenden Eigenschaften:

$$a_1 = 4\,z,\ b_1 = \frac{1}{4}\,z$$

sowie

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{a_n \cdot b_n}{a_{n+1}} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

a) Beweisen Sie, dass dann stets $a_n + b_n \geq 2\,z$ gilt.
b) Beweisen Sie, dass jedes Folgenglied a_n größer ist als das nächste Glied a_{n+1}.

531045

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei D. Auf der Strecke $\overline{CD}$ wird ein beliebiger Punkt P gewählt, und M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PD}$. Durch P und M werden Parallelen zur Geraden AB gelegt. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bilden ein Trapez.

Für welche Lage von P ist der Flächeninhalt dieses Trapezes am größten?

531046

Kann man für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m < n$ die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen in unendlich viele Teilmengen zu je drei Zahlen so zerlegen, dass in jeder Teilmenge die drei Zahlen die drei Abstände m, n bzw. $m + n$ voneinander haben?

Hinweis: „Zerlegung“ bedeutet, dass jede ganze Zahl in genau einer Teilmenge enthalten sein soll. Die Abstände der drei Zahlen a, b, c sind $|a - b|$, $|a - c|$ und $|b - c|$.