

53. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Aufgaben – 1. Tag



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

531141

Es sei n eine nichtnegative ganze Zahl.

Man beweise, dass dann

$$5^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^n$$

keine Primzahl ist.

531142

Für jede positive ganze Zahl n bezeichnen wir mit y_n die Anzahl aller n -stelligen positiven ganzen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 vorkommen, wobei allerdings nie eine 5 auf eine 2 folgt.

Es seien nun $r \geq 1$ und $m \geq 2$ zwei ganze Zahlen. Man beweise, dass y_{rm-1} durch y_{m-1} teilbar ist.

531143

Eine positive ganze Zahl k heiße *energetisch*, wenn gilt: In welcher Weise auch immer die Elemente der Menge $M = \{1, 2, \dots, k\}$ in den Farben Rot und Grün eingefärbt werden, gibt es stets 10 nicht notwendig voneinander verschiedene gleichfarbige Zahlen aus M , deren Summe wiederum aus M ist und dieselbe Farbe hat. Man entscheide, ob es überhaupt eine energetische Zahl gibt, und bestimme gegebenenfalls die kleinste solche Zahl.