53. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531144

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4\,,$$
$$y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4\,,$$
$$z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4$$

erfüllen.

531145

Von 9 Münzen haben acht das gleiche Gewicht, eine ist gefälscht und deshalb leichter als die anderen. Um die gefälschte Münze zu finden, stehen 3 Waagen mit je 2 Schalen zur Verfügung. Eine der Waagen ist defekt, man weiß aber nicht, welche, die anderen beiden arbeiten korrekt. Die defekte Waage zeigt bei jeder Wägung ein willkürliches Ergebnis.

Man gebe ein Verfahren an, mit dem die gefälschte Münze durch 5 Wägungen sicher bestimmt werden kann.

Hinweis: Als Ergebnis einer Wägung auf einer solchen Schalenwaage liegt stets eines der drei unterscheidbaren Ergebnisse „L“ (die auf der linken Schale liegenden Gegenstände sind schwerer als die auf der rechten Schale liegenden), „R“ (die Gegenstände rechts sind schwerer) oder „M“ (beide Seiten sind gleich schwer) vor. Weitergehende Anzeigen gibt es nicht.

531146

Es sei M der Mittelpunkt des Inkreises des Tangentenvierecks $ABCD$. Im Inneren der Strecken $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ liegen Punkte P bzw. Q so, dass der Winkel CBA doppelt so groß ist wie der Winkel QBP. Man beweise, dass der Winkel ADC doppelt so groß ist wie der Winkel PDQ.