**53. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Bundesrunde)**
**Olympiadeklasse 12**
**Aufgaben – 1. Tag**



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531241

Es sei $n$ eine nichtnegative ganze Zahl.

Man beweise, dass dann

$$5^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^n$$

keine Primzahl ist.

531242

Für jede positive ganze Zahl $n$ bezeichnen wir mit $y_n$ die Anzahl aller $n$-stelligen positiven ganzen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 vorkommen, wobei allerdings nie eine 5 auf eine 2 folgt.

Es seien nun $r \geq 1$ und $m \geq 2$ zwei ganze Zahlen. Man beweise, dass $y_{rm-1}$ durch $y_{m-1}$ teilbar ist.

531243

Liegen zwei positive ganze Zahlen $n$ und $k$ vor, so sagen wir, $k$ sei *$n$-ergetisch*, wenn gilt: In welcher Weise auch immer die Elemente der Menge $M = \{1, 2, \ldots, k\}$ in den Farben Rot und Grün eingefärbt werden, gibt es stets $n$ nicht notwendig voneinander verschiedene gleichfarbige Zahlen aus $M$, deren Summe wiederum aus $M$ ist und dieselbe Farbe hat. Man bestimme für jede positive ganze Zahl $n$, für die es überhaupt eine $n$-ergetische Zahl gibt, die kleinste solche Zahl.