

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

540811

Für den Inhalt einer Pralinschachtel sollen zwei Sorten Pralinen verwendet werden. Von der einen Sorte kosten 100 g Pralinen 2,30 €. Von der anderen kostet die gleiche Menge 1,80 €.

Die Bestückung solcher Pralinschachteln soll so erfolgen, dass der Verkaufspreis pro 100 g Pralinen dieser Schachteln 2,00 € beträgt.

Ermittle, wie viel Kilogramm Pralinen der ersten Sorte für Schachteln mit einer Pralinengesamtmasse von 10 kg benötigt werden.

540812

Ermittle alle Zahlen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Zahl ist eine dreistellige Primzahl.
- (2) Die erste Ziffer stimmt mit der letzten überein.
- (3) Die Quersumme der Zahl beträgt 19.

540813

Gegeben sind drei voneinander verschiedene Geraden, die einander in einem Punkt W schneiden.

Gesucht sind Dreiecke, in denen die gegebenen Geraden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel sind.

Klaus schlägt folgende Konstruktion vor: „Ich bezeichne die drei Geraden wie üblich mit w_α , w_β und w_γ . Auf w_γ wähle ich einen Punkt C , welcher vom Punkt W verschieden ist. Ich spiegle den Punkt C an w_α und bezeichne den Bildpunkt mit C_α . Anschließend spiegle ich den Punkt C an w_β und bezeichne diesen Punkt mit C_β . Die Gerade durch C_α und C_β heiße c . Den Schnittpunkt von c mit w_α bezeichne ich mit A und den Schnittpunkt von c mit w_β mit B . Das aus den Punkten A , B und C gebildete Dreieck ist eines der gesuchten Dreiecke.“

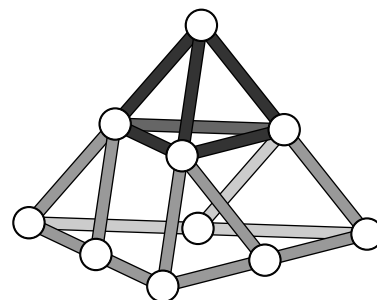
Zeige, dass für die von Klaus angegebene Konstruktion folgende Fälle eintreten können:

- a) Die Konstruktion ist durchführbar und führt zu einem solchen Dreieck.
- b) Die Konstruktion ist durchführbar, führt aber nicht zu einem solchen Dreieck.
- c) Die Konstruktion ist nicht durchführbar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

540814

Jana hat ein Magnetspiel mit 80 zueinander kongruenten Stabmagneten und 40 zueinander kongruenten Eisenkugeln. Die Verbindung von Stabmagneten kann nur über dazwischenliegende Eisenkugeln erfolgen. Die Maße der Stabmagnete und Eisenkugeln sind derart, dass sich drei Stabmagnete und drei Kugeln problemlos zu einem gleichseitigen Dreieck mit den Kugeln als „Eckpunkten“ verbinden lassen.



A 540814

Jana möchte Modelle von regelmäßigen Tetraedern bauen. Tetraeder sind Vierflächner, also geometrische Körper mit vier Seitenflächen. Ein solches Tetraeder heißt regelmäßig, wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Die „Spitze“ des Tetraeder-Modells ist eine Kugel. Von dieser aus wird das Tetraeder-Modell etagenweise nach unten weitergebaut.

Die erste Etage bildet zusammen mit der „Spitze“ ein regelmäßiges Tetraeder-Modell aus vier Kugeln und sechs Stabmagneten. Die erste Etage ist in der Abbildung A 540814 mit schwarzen Stabmagneten und weißen Kugeln dargestellt.

Die n -te Etage bildet zusammen mit den vorherigen Etagen und der „Spitze“ ein regelmäßiges Tetraeder-Modell, dessen Kanten aus jeweils n Stabmagneten und der entsprechenden Anzahl von Verbindungskugeln bestehen. Zur Verstärkung der Stabilität wird weiter an jeder Kugel in der untersten Ebene, die sich innerhalb einer Kante befindet, genau ein Stabmagnet als Querstrebe zu einer Kugel in der nächsthöheren Ebene angesetzt.

In der Abbildung A 540814 ist ein Tetraeder-Modell mit zwei Etagen dargestellt, wobei die zweite Etage mit hellgrauen Stabmagneten und weißen Kugeln gebaut wurde.

- Gib an, wie viele Kugeln und wie viele Stabmagnete benötigt werden, um das Tetraeder-Modell aus der Abbildung zu bauen.
- Ermittle, wie viele Kugeln und wie viele Stabmagnete benötigt werden, um an das Tetraeder-Modell aus der Abbildung eine weitere Etage anzubauen.
- Ermittle die Anzahl der Kugeln und die Anzahl der Stabmagnete in der n -ten Etage.
- Ermittle, wie viele Etagen das größte solche Tetraeder-Modell hat, das sich mit Janas Magnetspiel bauen lässt.