

54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541211

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen w, x, y, z , die die Gleichungen

$$x + 10z^2 = 2014, \tag{1}$$

$$2y + z = 54, \tag{2}$$

$$\left(y + 2z + \frac{7}{2}w\right)z = 1211 \tag{3}$$

erfüllen.

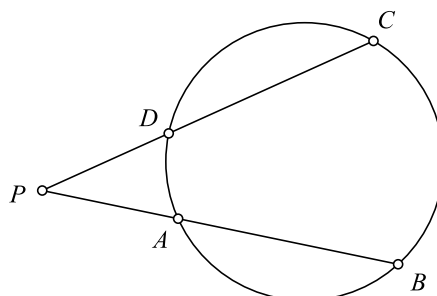
541212

Gegeben sind ein Kreis vom Radius r und ein außerhalb dieses Kreises gelegener Punkt P . Von P werden zwei Strahlen gezeichnet, die den Kreis in vier Punkten A, B, C und D so schneiden, dass $|AB| = |BC| = |CD|$ gilt.

Ein Strahl enthält die Punkte A und B , der andere die Punkte C und D . Dabei liegt der Punkt D zwischen den Punkten P und C , und der Punkt A liegt zwischen den Punkten P und B , siehe Abbildung A 541212.

Teil a) Man bestimme die Größe des Winkels APD , wenn $|AB| = 5$ cm und $r = 3$ cm gilt.

Teil b) Man gebe eine allgemeine Formel zur Berechnung der Größe des Winkels APD in Abhängigkeit von r und $|AB|$ an.



A 541212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541213

Man bestimme alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 2\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + 3$$

erfüllen.

541214

Auf einige Felder eines 8×8 -Schachbretts soll jeweils ein Spielstein gelegt werden. Dabei darf jedes Feld, ob belegt oder nicht belegt, höchstens ein Nachbarfeld haben, das mit einem Stein belegt ist. Man ermittle die maximale Anzahl von Steinen, die unter dieser Bedingung auf dem Schachbrett untergebracht werden können.

Hinweis: Als Nachbarfelder gelten hierbei alle Felder, die mit dem betrachteten Feld eine gemeinsame Seite haben.