54. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

540721

Felix will m Gegenstände gleicher Form und Größe in n gleichartige Kartons verpacken. Wenn Felix in jeden Karton genau fünf Gegenstände verpacken will, so verbleiben für den letzten Karton nur noch genau zwei Gegenstände. Wenn er hingegen in jeden vorhandenen Karton jeweils genau vier Gegenstände verpacken will, so bleibt genau ein Gegenstand übrig.

Ermittle, wie viele Gegenstände Felix in wie viele Kartons verpacken will.

540722

Marie gibt ihrer Freundin Elisabeth einen Würfel. Elisabeth würfelt dreimal. Marie fordert sie auf, folgende Rechnung durchzuführen: „Verdopple die erste gewürfelte Zahl, addiere zum erhaltenen Ergebnis 5, multipliziere die erhaltene Summe mit 5, addiere dazu die zweite gewürfelte Zahl, multipliziere das erhaltene Ergebnis mit 10 und addiere dazu jetzt noch die dritte gewürfelte Zahl.“ Elisabeth gibt das Ergebnis 885 an. „Jetzt weiß ich, welche drei Zahlen du gewürfelt hast“, sagt Marie.

Zeige, dass man diese drei Zahlen tatsächlich eindeutig bestimmen kann, und gib sie in der von Elisabeth gewürfelten Reihenfolge an.

540723

Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die $\frac{n+13}{n-11}$ eine positive ganze Zahl ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

540724

Max beschäftigt sich gern mit geometrischen Figuren und hat dabei schon manche Entdeckung gemacht.

a) Er zeichnet ein Rechteck $ABCD$ und markiert auf der Diagonalen $\overline{AC}$ einen von A und C verschiedenen Punkt P. Den Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden AD durch den Punkt P mit der Seite $\overline{AB}$ nennt er E und den mit der Seite $\overline{CD}$ nennt er G. Den Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden AB durch den Punkt P mit der Seite $\overline{BC}$ bezeichnet er mit F und den mit der Seite $\overline{AD}$ bezeichnet er mit H. Max behauptet, dass die Rechtecke $DHPG$ und $BFPE$ denselben Flächeninhalt haben. Erstelle eine entsprechende Zeichnung und beweise, dass die Rechtecke $DHPG$ und $BFPE$ stets denselben Flächeninhalt haben, wenn sie wie beschrieben konstruiert wurden.

b) Nun zeichnet Max ein Dreieck ABC. Er bezeichnet den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit D, den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ bezeichnet er mit E und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ bezeichnet er mit F. Die Verbindungsstrecken $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ und $\overline{CD}$ heißen die Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC. Diese schneiden sich bekanntlich in einem Punkt, den Max mit S bezeichnet. Max behauptet nun: Die sechs Dreiecke ADS, DBS, BES, ECS, CFS, FAS haben denselben Flächeninhalt.

   Erstelle eine entsprechende Zeichnung und beweise, dass die sechs Dreiecke ADS, DBS, BES, ECS, CFS, FAS stets denselben Flächeninhalt haben, wenn sie wie beschrieben konstruiert wurden.