

54. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

540921

- a) Für zwei rationale Zahlen a und b gelte

$$a - b < 0 \quad \text{und} \quad a : b < 0.$$

Weisen Sie nach, dass für jede der beiden Zahlen eindeutig feststellbar ist, ob sie positiv oder ob sie negativ ist.

- b) Weisen Sie nach: Wenn für zwei rationale Zahlen a und b die Beziehung

$$a + b = a \cdot b = a : b$$

gilt, so ist $(a - b)$ das Dreifache von a .

- c) Untersuchen Sie, ob auch die Umkehrung der Aussage b) gilt.

540922

Anton und Benno treffen sich an ihrem heutigen gemeinsamen Geburtstag und stellen Folgendes fest:

Anton: „Sobald ich so alt bin, wie du sein wirst, wenn ich so alt sein werde, wie du heute bist, wirst du 83 Jahre alt sein.“

Benno: „Richtig, denn als ich 30 war, war ich ja doppelt so alt, wie du damals warst.“

Zeigen Sie, dass sich hieraus eindeutig bestimmen lässt, wie alt die beiden sind, und geben Sie das Produkt der beiden Altersangaben an.

Hinweis: Es soll davon ausgegangen werden, dass es sich bei allen Altersangaben um positive ganze Zahlen handelt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

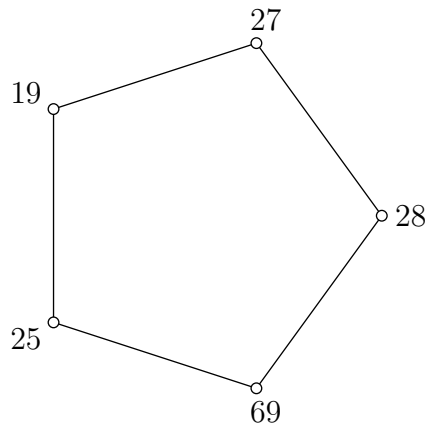
540923

Es sei $ABCD$ ein Rechteck und P ein Punkt in seinem Inneren. Weiter seien E, F, G, H die Lotfußpunkte von P auf die Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und \overline{DA} des Rechtecks. Die vier Lote zerlegen das Rechteck $ABCD$ in die vier Teilrechtecke $AEPH, EBFP, PFCG$ und $HPGD$.

Zeigen Sie:

- Wenn P auf \overline{BD} liegt, dann sind die Rechtecke $AEPH$ und $PFCG$ flächengleich.
- Wenn die Rechtecke $AEPH$ und $PFCG$ flächengleich sind, dann liegt P auf \overline{BD} .

540924



Die Ecken eines Fünfecks sollen so mit positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, sind teilerfremd.
- Zwei Zahlen, die nicht an benachbarten Ecken stehen, sind nicht teilerfremd.

Eine Beschriftung der Ecken des Fünfecks entsprechend den gegebenen Bedingungen nennen wir *zulässig*.

Beispielsweise ist die Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 28, 69, 25, 19 und 27 im Uhrzeigersinn nicht zulässig, denn die Zahlen 28 und 19 liegen nicht an benachbarten Ecken, sind aber teilerfremd. Somit ist Bedingung (2) nicht erfüllt.

- Weisen Sie nach, dass die Zahl 2 in keiner zulässigen Beschriftung enthalten ist.
- Finden Sie eine zulässige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderten Eigenschaften hat.