54. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541221

Für jede reelle Zahl a bestimme man sämtliche Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$|x - y| + x = 1\,, \tag{1}$$
$$x + y = a \tag{2}$$

erfüllen.

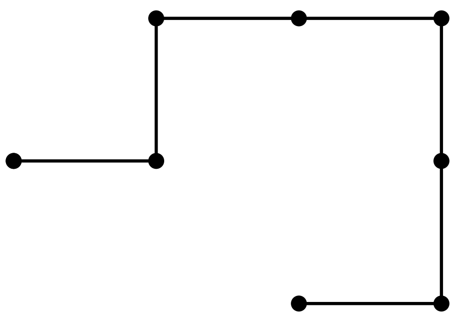
541222

Eine ebene *Knickschlange* besteht aus einer Kette von Segmenten der Länge 1, die in ihren Endpunkten beweglich miteinander verbunden sind. Je zwei aufeinanderfolgende Segmente sind entweder parallel oder senkrecht zueinander, und alle Verbindungsstellen (zu denen auch die beiden Endpunkte der Kette gezählt werden) sollen voneinander verschieden sein.

Abbildung A 541222 zeigt eine Knickschlange der Länge 7.

Zirkuswärter Zizero will eine Knickschlange in einen kreisrunden Käfig vom Radius 3 so einsperren, dass sich die komplette Schlange im Innern oder auf dem Rand des Käfigs befindet und der Kopf der Schlange (ein Ende der Kette) im Mittelpunkt des Käfigs liegt.

Man bestimme die maximale Länge einer Knickschlange, die Zizero im Käfig unterbringen kann.



A 541222

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541223

Auf den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ des Quadrates $ABCD$ liegen die Punkte E bzw. F.

Man beweise: Wenn die Punkte A, E und F die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, dann ergibt die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABE und AFD den Flächeninhalt des Dreiecks ECF.

541224

Man untersuche, für welche positiven ganzen Zahlen n es positive ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, von denen keine zwei gleich sind und für die

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$$

gilt.