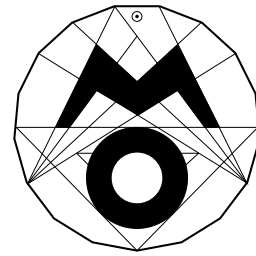


54. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Landesrunde)  
Olympiadeklasse 8  
Aufgaben – 2. Tag



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

540834

Ermittle alle rationalen Zahlen  $x$ , für die ein gleichschenkliges Dreieck existiert, dessen Seitenlängen die Maßzahlen  $-5x + 15$ ,  $3x + 18$  und  $4x + 20$  haben.

540835

Zur Eröffnung eines Sportgeschäftes sind hinter den beiden Schaufenstern als Auslagen jeweils Tennisbälle in mehreren Schichten übereinander gestapelt. Um ein Fortrollen der Bälle der untersten Schicht zu verhindern, werden geeignete Rahmen verwendet. Die Tennisbälle haben einen Durchmesser von 6,5 cm. Ein Tennisball in einer höheren Schicht liegt gerade immer über dem Mittelpunkt des Quadrats, das die Mittelpunkte der ihn berührenden vier Tennisbälle in der Schicht darunter bilden.

- a) Bei der Auslage hinter dem ersten Schaufenster liegt die unterste Schicht in einem quadratischen Rahmen mit einer Seitenlänge von 65 cm. Auf diese unterste Schicht sind möglichst viele weitere Schichten mit möglichst vielen Tennisbällen geschichtet.  
Ermittle die Anzahl der Tennisbälle, die hierfür benötigt wurden.  
Ermittle die Anzahl der Bälle, die von oben sichtbar sind.
- b) Bei der Auslage hinter dem zweiten Schaufenster liegt die unterste Schicht in einem rechteckigen Rahmen mit einer Länge von 91 cm und einer Breite von 65 cm und füllt diesen Rahmen „lückenlos“ aus. Auf diese unterste Schicht sind möglichst viele weitere Schichten mit möglichst vielen Tennisbällen geschichtet.  
Ermittle die Anzahl der Tennisbälle, die hierfür benötigt wurden.  
Ermittle die Anzahl der Bälle, die von oben sichtbar sind.

*Hinweis:* Um die Anzahl der von oben sichtbaren Bälle zu ermitteln, betrachte die jeweilige Auslage senkrecht von weit oben. Alle Bälle, von denen man Teile der Oberfläche sieht, sind zu zählen.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

540836

Betrachtet wird ein Tetraeder  $ABCD$ . Die Mittelpunkte der Kanten  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$  und  $\overline{AD}$  werden in dieser Reihenfolge mit  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  bezeichnet.

- a) Beweise, dass die Punkte  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  in einer Ebene liegen und ein Parallelogramm bilden.
- b) Ermittle den Flächeninhalt des Parallelogramms  $EFGH$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  unter folgenden Voraussetzungen:
  - (1) Die Kante  $\overline{AB}$  hat die Länge  $a$ .
  - (2) Die Kante  $\overline{CD}$  hat die Länge  $b$ .
  - (3) Die Kanten  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  sowie die Kanten  $\overline{AD}$  und  $\overline{BD}$  sind gleich lang.

*Hinweis:* Ein Tetraeder ist ein geometrischer Körper mit genau vier Seitenflächen. Diese Seitenflächen sind Dreiecke, welche im Allgemeinen nicht kongruent zueinander sind.