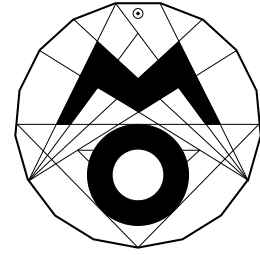


54. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Landesrunde)  
Olympiadeklasse 9  
Aufgaben – 2. Tag



© 2014 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

540934

Gegeben sind drei positive Zahlen  $g$ ,  $b$  und  $f$ , für die

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

gilt.

- Geben Sie zwei Beispiele für je drei positive ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft an.
- Beweisen Sie, dass für positive reelle Zahlen  $g$ ,  $b$  und  $f$ , die (1) erfüllen, stets auch

$$g + b \geq 4f \quad (2)$$

gilt.

540935

Es sei ein Rechteck  $ABCD$  mit den Seitenlängen  $|AB| = 12$  und  $|BC| = 9$  gegeben sowie ein Punkt  $M$  auf der Diagonalen  $\overline{AC}$  mit  $|AM| = 5$ . Mit  $k(r)$  bezeichnen wir die Kreislinie mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r \geq 0$ .

- Geben Sie alle möglichen Radien  $r$  an, für die  $k(r)$  mit dem Rand des Rechtecks  $ABCD$  genau einen Punkt gemeinsam hat, und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Geben Sie alle möglichen Radien  $r$  an, für die  $k(r)$  mit dem Rand des Rechtecks  $ABCD$  genau drei Punkte gemeinsam hat, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

540936

Die sechs Seitenflächen eines Würfels sollen so mit verschiedenen positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass zwei Zahlen genau dann teilerfremd sind, wenn sie auf gegenüberliegenden Seitenflächen liegen.

- Finden Sie eine derartige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderte Eigenschaft hat.
- Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert, welchen die größte der sechs Zahlen einer derartigen Beschriftung annehmen kann.