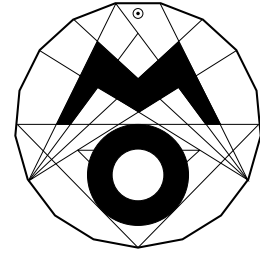


54. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2014 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

541031

- a) Ermitteln Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$y = 12x - \frac{1}{9}, \quad y = \frac{1}{12} - 9x$$

erfüllen.

- b) Gegeben sind zwei reelle Zahlen a und b mit $ab \neq 0$.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a und b alle Paare (x, y) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$y = ax - \frac{1}{b}, \quad y = \frac{1}{a} - bx$$

erfüllen.

541032

Eine im Punkt C an den Umkreis des Dreiecks ABC gelegte Tangente schneide die Verlängerung der Strecke \overline{AB} über A hinaus in einem Punkt D . Die Halbierende des Winkels ACB schneide die Strecke \overline{AB} in E und den Bogen \widehat{AB} in F .

- a) Konstruieren Sie eine solche Figur aus $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 7$ cm und $|CA| = 5$ cm.
b) Beweisen Sie, dass $|AF| = |FB|$ gilt.
c) Beweisen Sie, dass auch $|DC| = |DE|$ gilt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541033

Es sei $P = (p_1, p_2, \dots)$ die der Größe nach geordnete Folge der Primzahlen. Weiter sei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner als n .

- a) Bestimmen Sie $\pi(k) + k$ für $k = 54$.
- b) Zeigen Sie, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine positive ganze Zahl k so gibt, dass n in der Form $n = \pi(k) + k$ oder $n = p_k + k$ dargestellt werden kann.

Hinweis: Primzahlen sind ganze Zahlen größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Die Zahlen 0 und 1 sind keine Primzahlen, es gilt also $p_1 = 2$.