54. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541231

Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x(1-y) = y^2 - 3\,, \tag{1}$$
$$y(1-x) = x^2 + 1 \tag{2}$$

erfüllen.

541232

Die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ist durch $x_1 = 3$ und die rekursive Vorschrift

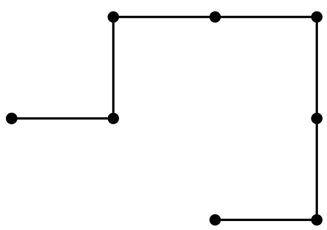
$$x_{n+1} = \frac{n+2}{n}\,(x_n - 1) \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

gegeben. Man beweise, dass sämtliche Glieder der Folge ganzzahlig sind.

541233

Eine ebene *Knickschlange* besteht aus einer Kette von Segmenten der Länge 1, die in ihren Endpunkten beweglich miteinander verbunden sind. Je zwei aufeinanderfolgende Segmente sind entweder parallel oder senkrecht zueinander und alle Verbindungsstellen (zu denen auch die beiden Endpunkte der Kette gezählt werden) sollen voneinander verschieden sein.

Abbildung A 541233 zeigt eine Knickschlange der Länge 7.



A 541233

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Zirkuswärter Zizero hat einen neuen kreisrunden Käfig vom Radius 4 bekommen, in den er eine möglichst lange Knickschlange einsperren will. Die komplette Schlange soll sich dabei im Innern oder auf dem Rand des Käfigs befinden, und ihr Kopf (ein Ende der Kette) soll im Mittelpunkt des Käfigs liegen.

Man bestimme die maximale Länge einer Knickschlange, die Zizero in seinem neuen Käfig unterbringen kann.