54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 1. Tag

© 2015 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

540841

In einer Klasse mit 25 Schülern soll ein Klassensprecher gewählt werden. Es gibt fünf Kandidaten, darunter Christian. Es wird nach folgendem Verfahren gewählt:

Jeder Schüler schreibt die Namen der fünf Kandidaten nebeneinander in der Reihenfolge, wie er sie für geeignet hält. Von diesen erhält jeweils der erste 5 Punkte, der zweite 4, der dritte 3, der vierte 2, der letzte, der am wenigsten geeignet erscheint, nur einen Punkt. Klassensprecher wird, wer insgesamt die meisten Punkte bekommt. Bei Gleichstand wird gelost.

a) Ermittle, wie viele Schüler Christian auf Platz 1 setzen müssen, damit er auf jeden Fall die Wahl gewinnt.

b) Wir verallgemeinern die Aufgabe. Die Klasse besteht aus s Schülern und es gibt k Kandidaten. Wieder soll jeder Schüler alle Kandidaten in eine Reihenfolge bringen, nach der der erste dann k Punkte und der letzte einen Punkt bekommen. Ermittle, wie viele Schüler Christian nun auf Platz 1 setzen müssen, damit er auf jeden Fall die Wahl gewinnt.

540842

Wir betrachten ein Quadrat und 9 Geraden, welche folgende Bedingung erfüllen: Jede der 9 Geraden zerlegt das Quadrat in 2 Vierecke, deren Flächeninhalte sich wie $2 : 3$ verhalten.

Beweise: Mindestens 3 dieser 9 Geraden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

540843

Betrachtet wird ein Gewichtssatz mit n Gewichtsstücken von 1 Gramm bis n Gramm. Diese Gewichtsstücke seien derart auf die beiden Schalen einer Balkenwaage verteilt, dass Gleichgewicht besteht.

a) Weise nach, dass eine derartige Verteilung für $n = 100$ existiert.

b) Es gelte $n = 100$ und es bestehe Gleichgewicht.

Untersuche, ob man in diesem Fall stets zwei Gewichtsstücke auf jeder Seite der Balkenwaage wegnehmen kann, ohne dass das Gleichgewicht verloren geht.