54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

540844

Inge und Paul haben ihrem Vater im Garten fleißig geholfen. Dieser hält jetzt zwei Briefumschläge in der Hand. Der erste enthält eine Belohnung für Inge, der zweite eine Belohnung für Paul. Ungeduldig greifen die beiden nach den Umschlägen. Doch der Vater weist sie zurück. „Findet erst einmal heraus, wie viel Geld in jedem der beiden Umschläge steckt. In jedem Umschlag befindet sich ein ganzzahliger Euro-Betrag und es gibt eine positive ganze Zahl n mit folgenden Eigenschaften: Wenn Inge 3 Euro an Paul abgibt, hat er n-mal so viel Geld wie Inge. Wenn dagegen Paul n Euro an Inge abgibt, hat sie dreimal so viel Geld wie Paul.“

Ermittle alle Zahlen n mit diesen Eigenschaften.

540845

Es seien u, v, w paarweise verschiedene Geraden, die den gemeinsamen Punkt W haben. Die Gerade u werde bei Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt W zuerst auf die Gerade v, dann auf die Gerade w und schließlich erstmals wieder auf u abgebildet. Die zugehörigen Größen der Drehwinkel von u auf v, v auf w und w auf u werden in dieser Reihenfolge mit δ, ε und φ bezeichnet.

Beweise: Ein Dreieck mit den Innenwinkelhalbierenden u, v und w existiert genau dann, wenn $\delta < 90°$, $\varepsilon < 90°$ und $\varphi < 90°$ gelten.

540846

a) Beweise: Wenn a und b teilerfremde, positive ganze Zahlen sind, dann hat die Gleichung $a \cdot x + b \cdot x = a \cdot b$ keine ganzzahlige Lösung x.

b) Ermittle eine Bedingung (B) an a und b derart, dass die folgende Aussage gilt:

Für positive ganze Zahlen a und b hat die Gleichung $a \cdot x + b \cdot x = a \cdot b$ genau dann eine ganzzahlige Lösung x, wenn die Bedingung (B) erfüllt ist.

c) Zwei Zahlenpaare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) positiver ganzer Zahlen werden ähnlich genannt, wenn $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ gilt. Zahlenpaare, die nicht ähnlich sind, heißen unähnlich.

Beweise, dass es unendlich viele zueinander unähnliche Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen gibt, für welche die Gleichung $a \cdot x + b \cdot x = a \cdot b$ eine ganze Zahl x als Lösung hat.