54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

540944

Wir betrachten die Menge $Q = \{25, 49, 121, \ldots\}$ der Quadrate aller derjenigen Primzahlen, die größer als 4 sind. Hieraus konstruieren wir die Menge D aller derjenigen positiven Zahlen, die sich als Differenz zweier Zahlen aus Q schreiben lassen.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Menge D.

540945

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $|\sphericalangle CBA| = 90°$.

Beweisen Sie: Berührt der Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{AD}$ die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt, so berührt der Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{BC}$ die Seite $\overline{AD}$ in einem inneren Punkt.

540946

a) Bestimmen Sie die größte reelle Zahl a mit der Eigenschaft, dass für alle reellen Zahlen $x, y > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x+y}{2} + \frac{8}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \geq a \cdot \sqrt{x\,y}$$

erfüllt ist.

b) Bestimmen Sie die größte reelle Zahl b mit der Eigenschaft, dass für alle reellen Zahlen $x, y > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x+y}{2} + \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \geq b \cdot \sqrt{x\,y}$$

erfüllt ist.