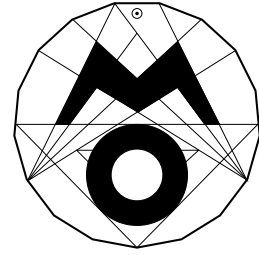


54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2015 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

541041

Man ermittle alle Paare (a, b) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$||a + b| - |a - b|| = |ab|, \quad (1)$$

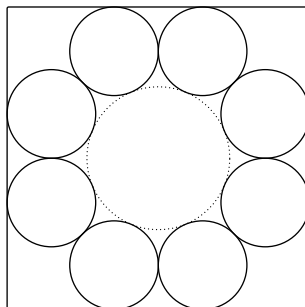
$$|a + b| + |a - b| = 1 \quad (2)$$

sind.

541042

Acht gleich große Kreise mit dem Radius r sind so in einer Ebene angeordnet, dass ihre Mittelpunkte ein regelmäßiges Achteck bilden und jeder Kreis seine beiden Nachbarkreise berührt. Ein Quadrat der Seitenlänge a umschließt alle 8 Kreise so, dass jede Quadratseite von zwei Kreisen berührt wird (siehe Abbildung A 541042).

- Drücken Sie die Länge r mit Hilfe der Variablen a aus.
- Die 8 Kreise umschließen einen Kreis mit dem Radius R so, dass sie alle diesen Kreis von außen berühren. Berechnen Sie R in Abhängigkeit von r .



A 541042

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541043

In einem Chor singen acht Schüler. Leider können zwei von ihnen nicht wirklich gut singen, und der Chorleiter möchte herausfinden, welche beiden das sind. Da er keinen alleine vorsingen lassen möchte, lädt er an jedem Tag vier von ihnen zu sich nach Hause ein und lässt sie dort gemeinsam etwas vorsingen. Am Klang dieses kleinen Chores kann er dann feststellen, ob unter diesen vieren mindestens einer der beiden gesuchten Schüler ist.

- a) Man beweise: Wenn der Chorleiter eine geeignete Strategie benutzt, kann er garantieren, nach spätestens 7 Tagen herausgefunden zu haben, welche beiden Schüler nicht gut singen können.
- b) Man beweise, dass die Aussage aus a) nicht mehr gilt, wenn man 7 durch 6 ersetzt.

Hinweis: Sie dürfen folgende Annahme machen: Eine Strategie des Chorleiters ist eine Auswahlregel, die jeweils die vier vorsingenden Schüler eines Tages eindeutig aus den Resultaten der vorherigen Tage bestimmt. Insbesondere müssen die vier vorsingenden Schüler des ersten Tages bereits fest gewählt sein.