54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541044

Bestimmen Sie die Menge der positiven geraden Zahlen, die sich nicht als Summe von zwei (möglicherweise gleichen) zusammengesetzten positiven ungeraden Zahlen darstellen lassen.

Hinweis: Eine positive Zahl n heißt *zusammengesetzt*, wenn sie sich als Produkt $n = a \cdot b$ von zwei ganzen Zahlen $a, b > 1$ schreiben lässt.

541045

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

Beweisen Sie: Berührt der Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{AD}$ die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt, so berührt der Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{BC}$ die Seite $\overline{AD}$ in einem inneren Punkt.

541046

Gegeben ist eine reelle Zahl a. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von dieser reellen Zahl a die größte reelle Zahl $b = b(a)$ mit der Eigenschaft, dass für alle reellen Zahlen $x, y > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x+y}{2} + a \cdot \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \geq b \cdot \sqrt{x\,y}$$

erfüllt ist.