54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541144

Es sei k eine positive ganze Zahl. Ferner sei n_k die Zahl, die im Dezimalsystem durch die Ziffer 7 gefolgt von k Ziffern 0 und einer Ziffer 1 am Ende dargestellt wird. Man beweise folgende Aussagen:

a) Keine der Zahlen n_k ist durch 13 teilbar.
b) Es gibt unendlich viele Zahlen n_k, die durch 17 teilbar sind.

541145

Von dem konvexen Viereck $ABCD$ ist bekannt, dass der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ die Gerade CD berührt. Man beweise, dass der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ genau dann die Gerade AB berührt, wenn die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ parallel sind.

541146

Man beweise, dass für alle $x, y, z > 0$ die Ungleichung

$$x + y + z + \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geq 4\sqrt[3]{xyz}$$

erfüllt ist.

Außerdem untersuche man, ob der Gleichheitsfall eintreten kann und wann das gegebenenfalls passiert.