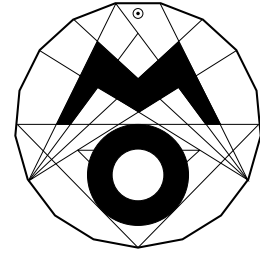


54. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Aufgaben – 1. Tag



© 2015 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541241

Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^3 + 9x^2y &= 10, \\ y^3 + xy^2 &= 2\end{aligned}$$

erfüllen.

541242

Eine positive ganze Zahl n heiße *glatt*, wenn es ganze Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mit der Eigenschaft gibt, dass

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = n$$

gilt. Man ermittle alle glatten Zahlen.

541243

Ein Auslandsaufenthalt von Schülerinnen soll durch ein Kennenlernseminar vorbereitet werden, zu dem auch ein touristischer Ausflug gehört. Um einen möglichst breiten Austausch zwischen den Schülerinnen zu fördern, sollen sie dabei so auf zwei Reisebusse verteilt werden, dass sich in keinem Bus zu viele der Schülerinnen kennen.

Jede der Mitreisenden kennt alle Teilnehmerinnen, denen sie selbst bekannt ist. Die Anzahl der paarweisen Bekanntschaften beträgt genau k .

Man beweise, dass dann die Aufteilung der Schülerinnen stets so erfolgen kann, dass die Zahl der Paare miteinander bekannter Schülerinnen in jedem Bus nicht größer als $k/3$ ist.