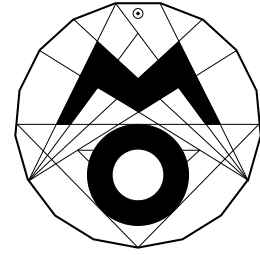


55. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben

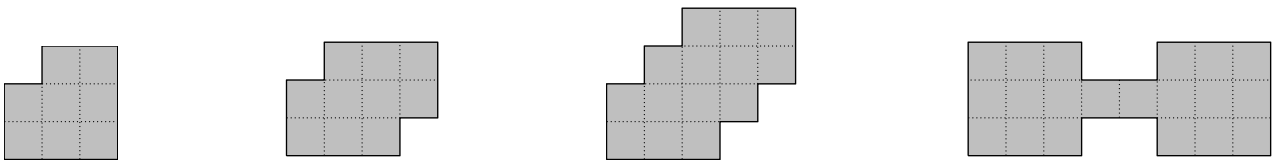


© 2015 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

550921

Max möchte folgende Figuren mit Dominosteinen auslegen:



a) Er hat bereits zwei verschiedene Möglichkeiten gefunden, die linke Figur zu legen:



Finden Sie die übrigen zwei Möglichkeiten!

Ein Nachweis, dass es tatsächlich genau vier Möglichkeiten gibt, wird nicht verlangt.

- b) Geben Sie für jede der beiden mittleren Figuren alle Möglichkeiten an, sie mit Dominosteinen zu legen. Auch hier wird kein Vollständigkeitsnachweis verlangt.
- c) Zeigen Sie, dass man die rechte Figur nicht mit Dominosteinen legen kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550922

Es seien n Lampen im Kreis angeordnet und zu Beginn befinden sich alle Lampen im Zustand AUS. Ein Elektriker geht von Lampe zu Lampe und schaltet um. Dabei werden Lampen, die sich vor dem Umschalten im Zustand AUS befinden, eingeschaltet und Lampen, die sich vor dem Umschalten im Zustand EIN befinden, ausgeschaltet. Sobald der Elektriker seine erste Runde vollendet hat, beginnt er eine neue Runde, schaltet dabei aber nur jede zweite Lampe um. Nach Vollendung der zweiten Runde beginnt die dritte, in der er nur noch jede dritte Lampe umschaltet usw. In jeder Runde überspringt er also eine Lampe mehr. Sollte er einmal am Ende der Runde nicht genau auf die Lampe n treffen, weil er diese überspringt, so macht er den letzten Schritt in die neue Runde noch mit alter Schrittweite und erhöht seine Schrittweite erst, nachdem er die erste Lampe seiner neuen Runde geschaltet hat.

Für $n = 7$ werden beispielsweise nacheinander folgende Schalter betätigt:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 2 - 4 - 6 - 1 - 4 - 7 - 4 - 1 - 6 - \dots$$

Nach dem zehnten Schaltvorgang wird dabei der Schalter 7 erstmals übersprungen.

- Es sei $n = 120$. Begründen Sie, dass der Schalter 120 in den ersten 5 Runden jedes Mal betätigt wurde.
- Ermitteln Sie für $n = 120$ die Anzahl der Schaltvorgänge, die vor dem ersten Überspringen des Schalters 120 durchgeführt werden.
- Die Anzahl der Lampen sei nun $n = 840$. Ermitteln Sie die Nummer des Schaltvorgangs, der erstmals eine der beiden Lampen 49 und 121 ausschaltet.

550923

Lotta, 16 Jahre, und ihr Bruder Dieter, 12 Jahre, die schon bei „Jugend musiziert“ aufgetreten sind, spielen in einem Seniorenheim. Von der Heimverwaltung erfahren sie das Durchschnittsalter a der Senioren. Lotta rechnet und sagt dann zu ihrem Bruder: „Wenn ich mich mit meinem Alter zu den Senioren rechne, dann senkt sich das Durchschnittsalter um genau 10 Jahre.“ Dieter ergänzt: „Und wenn ich mich mit meinem Alter als weitere Person hinzunehme, dann reduziert sich das Durchschnittsalter um weitere 8 Jahre.“

- Lässt sich aus diesen Angaben das Durchschnittsalter a der Senioren eindeutig ermitteln?
- Bestimmen Sie das Durchschnittsalter a und die Anzahl n der anwesenden Senioren!

Bemerkung: Die Altersangaben der einzelnen Zuschauer werden als ganze Zahlen interpretiert.

550924

In einem Dreieck ABC gelte $|\sphericalangle ACB| = \gamma > 90^\circ$.

Beweisen Sie: Wenn sich das Dreieck ABC mit einem Strahl durch C in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegen lässt, dann ist ein Innenwinkel des Dreiecks ABC doppelt oder dreimal so groß wie ein anderer Innenwinkel dieses Dreiecks.