55. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551221

Es seien x, y, z reelle Zahlen, die das Gleichungssystem

$$z = 2(x-1)^2 - 1\,, \tag{1}$$
$$y = 2x + 3\,, \tag{2}$$
$$x = -2y + z \tag{3}$$

erfüllen. Welchen Wert kann das Produkt xyz höchstens annehmen?

551222

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Ein weiterer Kreis k', dessen Mittelpunkt M' von M einen Abstand $d > 0$ hat, liege so in der Ebene, dass die beiden Kreise sich in zwei Punkten P und P' schneiden. Dabei sollen die Tangenten im Punkt P an die Kreise k und k' senkrecht aufeinanderstehen. Es sei S der Schnittpunkt der Strecken $\overline{MM'}$ und $\overline{PP'}$. Man bestimme die Länge der Strecke $\overline{MS}$ in Abhängigkeit von d und r.

551223

Eine Wand eines Gebäudes soll mit einem rechteckigen Streifen verziert werden, der aus zwei Reihen von quadratischen Fliesen besteht. In jeder der beiden Reihen sollen n Fliesen angebracht werden.

Der Auftraggeber verlangt, dass sich je zwei benachbarte Fliesen in der Farbe unterscheiden. Zwei Fliesen gelten dabei als benachbart, wenn sie nebeneinander oder untereinander angeordnet sind. Es stehen Fliesen in drei verschiedenen Farbtönen zur Verfügung.

Man ermittle in Abhängigkeit von der ganzen Zahl $n \geq 1$ die Anzahl aller möglichen Farbmuster.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551224

Die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \dots$ ist durch $x_1 = 1$ und die rekursive Vorschrift

$$x_{k+1} = x_k + y_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots$$

gegeben, wobei y_k die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung von x_k bezeichnet. Man beweise, dass die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \dots$ alle Potenzen von 4 enthält, dass also für jede positive ganze Zahl n ein Index k mit $x_k = 4^n$ existiert.