55. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

550831

Nach einem Einkauf zählt Herr Sparfuchs den verbliebenen Geldbetrag in seinem Portemonnaie. Er stellt erstaunt fest, dass er genau die Hälfte seines Geldes ausgegeben hat und dass der Geldbetrag jetzt genau so viele Cent wie vorher Euro und halb so viele Euro wie vorher Cent angibt.

Begründe, dass man aus diesen Angaben eindeutig den Geldbetrag in Euro und Cent ermitteln kann, welchen Herr Sparfuchs nach dem Einkauf in seinem Portemonnaie hat, und gib diesen Geldbetrag an.

550832

Ermittle alle positiven ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n-6}<\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-7}\,.$$

550833

Wir betrachten ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Höhenfußpunkt auf der Seite $\overline{BC}$ sei D, der Höhenfußpunkt auf der Seite $\overline{AC}$ sei E und der Höhenfußpunkt auf der Seite $\overline{AB}$ sei F. Der Fußpunkt des Lotes von D auf die Gerade AB sei P, der Fußpunkt des Lotes von D auf die Gerade BE sei Q, der Fußpunkt des Lotes von D auf die Gerade CF sei R und der Fußpunkt des Lotes von D auf die Gerade AC sei S.

a) Zeichne ein solches Dreieck ABC mit den Punkten D, E, F, P, Q, R und S, den genannten Höhen und Loten sowie den Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ und $\overline{RS}$. Kennzeichne die rechten Winkel.

b) Beweise: Die Punkte P, Q, R und S liegen stets auf einer Geraden.

Hinweis: Unter den Voraussetzungen der Aufgabe liegen die Punkte P, Q, R und S genau dann auf einer Geraden, wenn die beiden Gleichungen $|\sphericalangle PQD| + |\sphericalangle DQR| = 180°$ und $|\sphericalangle QRD| + |\sphericalangle DRS| = 180°$ gelten.