55. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

550931

Gegeben sind sieben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die kleinste dieser Zahlen sei a. Thomas sucht alle Zahlen, die sich als das Produkt zweier verschiedener dieser sieben Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie, wie viele Zahlen sich so darstellen lassen, wenn $a = 2$ ist.
Hinweis: Terme der Form $a \cdot b$ und $b \cdot a$ – möglicherweise auch noch andere Terme – liefern das gleiche Produkt. Es sollen nur die verschiedenen Produkte gezählt werden, nicht die verschiedenen Möglichkeiten für die Entstehung dieser Produkte.

b) Weisen Sie nach, dass in dieser Aufgabe mit einer beliebigen Zahl a stets weniger als 25 verschiedene Produkte entstehen.

c) Thomas wählt nun nur diejenigen Produkte aus, in denen beide Faktoren den ersten drei Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei S. Danach wählt er nur diejenigen Produkte aus, deren beide Faktoren den drei größten Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei T. Thomas stellt fest, dass $T - S = 2016$ gilt.
Zeigen Sie, dass durch diese Feststellung über S und T die gegebenen Zahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie für diesen Fall die Zahl a.

550932

In der Finanzwelt wird zu jeder vollen Stunde im Jahr berechnet, welcher Anteil des Finanzweltjahres bis dahin vergangen ist. Dabei wird jeder Monat als $\frac{1}{12}$ eines Jahres, jeder Tag eines Monats mit n Tagen als $\frac{1}{n}$ eines Monats und jede Stunde als $\frac{1}{24}$ eines Tages gerechnet.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Zwei Beispiele:

Am 12. August um 14 Uhr ist also seit Jahresbeginn der Bruchteil von

$$\frac{1}{12} \cdot \left(7 + \frac{1}{31} \cdot \left(11 + \frac{14}{24}\right)\right) = \frac{2743}{4464} = 0{,}614471326\ldots$$

eines Finanzweltjahres vergangen, da schon 7 ganze Monate, 11 von 31 Tagen des Augustes sowie am 12. August schon 14 von 24 Stunden vergangen sind.

Am 26. Februar 2016 (ein Schaltjahr!) um 9 Uhr ist seit Jahresbeginn der Bruchteil von

$$\frac{1}{12} \cdot \left(1 + \frac{1}{29} \cdot \left(25 + \frac{9}{24}\right)\right) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$$

eines Finanzweltjahres vergangen.

Herr G. sucht nun einen vom Jahresbeginn und Jahresende verschiedenen Zeitpunkt im Jahr derart, dass die Zahl, welche den Bruchteil des Finanzweltjahres bis zu diesem Zeitpunkt angibt, möglichst wenige Stellen nach dem Komma hat. Er interessiert sich dabei sowohl für Schaltjahre als auch für Nicht-Schaltjahre.

Finden Sie einen solchen Zeitpunkt möglichst früh im Jahr.

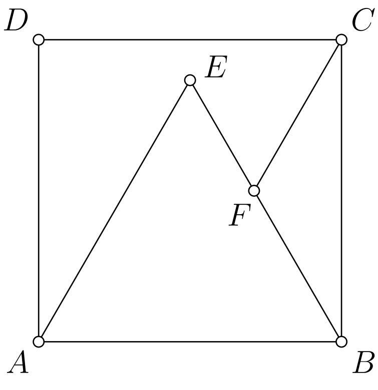
Hinweis: Es sind nur volle Stunden erlaubt.

<u>550933</u>

Im Inneren eines Quadrates $ABCD$ liegt der Punkt E so, dass das Dreieck ABE gleichseitig ist. Der Punkt F liegt auf der Strecke $\overline{BE}$ so, dass $|BF| = |CF|$ gilt.

Die Strecken $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ seien bereits eingezeichnet (siehe Abbildung A 550933). Durch Einzeichnen weiterer Strecken soll das Quadrat in sechs Teildreiecke zerlegt werden, die allesamt gleichschenklig sowie nicht rechtwinklig sind, und keine zwei der sechs Teildreiecke sollen zueinander kongruent sein.

Weisen Sie nach, dass dies möglich ist. Berechnen Sie die Innenwinkelgrößen aller sechs Teildreiecke.



A 550933