55. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551031

Gegeben sind sieben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die kleinste dieser Zahlen sei a. Thomas sucht alle Zahlen, die sich als das Produkt zweier verschiedener dieser sieben Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie, wie viele Zahlen sich so darstellen lassen, wenn $a = 2$ ist.
Hinweis: Terme der Form $a \cdot b$ und $b \cdot a$ – möglicherweise auch noch andere Terme – liefern das gleiche Produkt. Es sollen nur die verschiedenen Produkte gezählt werden, nicht die verschiedenen Möglichkeiten für die Entstehung dieser Produkte.

b) Weisen Sie nach, dass in dieser Aufgabe mit einer beliebigen Zahl a stets weniger als 25 verschiedene Produkte entstehen.

c) Thomas wählt nun nur diejenigen Produkte aus, in denen beide Faktoren den ersten drei Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei S. Danach wählt er nur diejenigen Produkte aus, deren beide Faktoren den drei größten Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei T. Thomas stellt fest, dass $T - S = 2016$ gilt.
Zeigen Sie, dass durch diese Feststellung über S und T die gegebenen Zahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie für diesen Fall die Zahl a.

551032

Ein Glücksrad wird zweimal gedreht; bei jedem Mal liefert es eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2016$, wobei jeweils alle diese Zahlen gleich wahrscheinlich sind. Anschließend wird die Summe der 55-ten Potenzen der beiden Zahlen gebildet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Ergebnis die Endziffer 6? Geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551033

Gegeben sind ein Quadrat $ABCD$ sowie Punkte E, F, G und H derart, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) Die Punkte C, G, H und D liegen in dieser Reihenfolge auf der Geraden CD.

(2) Die Punkte B, F, E und G liegen in dieser Reihenfolge auf der Geraden BG.

(3) Die Dreiecke ABE, AED, BCF, CGF, DEH und EGH sind gleichschenklig.

Beweisen Sie, dass durch diese Bedingungen die Größen der Innenwinkel der sechs genannten Dreiecke eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie die Größen aller dieser Winkel.

Hinweis: Ein Nachweis, dass eine Figur mit den geforderten Eigenschaften existiert, muss nicht erbracht werden.