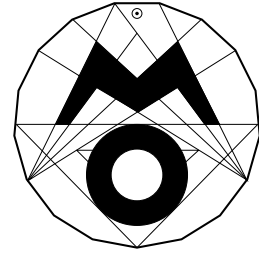


55. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2015 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551034

Georg hat n gleich große Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er k Kisten; in die erste Kiste passt genau ein Ball, in die zweite Kiste passen genau zwei usw. Er möchte nun alle Bälle in Kisten verstauen, wobei in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen sollen.

Zeigen Sie, dass das für die folgenden Werte möglich ist:

- a) $n = 55$ und $k = 10$,
- b) $n = 2016$ und $k = 63$.

551035

Die Position eines rechteckigen, zwei Meter langen und ein Meter breiten Freigeheges für Kleintiere auf einer Wiese kann durch Anheben an einer Ecke, Drehen um die gegenüberliegende Ecke und nachfolgendes Absetzen geändert werden. Diese Bewegung des Freigeheges sei mit „Eckdrehung“ gemeint.

Wie viele Eckdrehungen sind mindestens nötig, um das Freigehege letztendlich genau um seine Breite (in Richtung derselben) zu verschieben?

Insbesondere soll also jede Ecke des Freigeheges am Ende genau einen Meter von ihrer Ausgangsposition entfernt sein.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551036

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungspaare (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x + y &= 15, \\ y &= x + \sqrt{y}.\end{aligned}$$

b) Weisen Sie nach, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y &= 15, \\ y &= x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}}\end{aligned}$$

genau ein reelles Lösungspaar (x, y) besitzt.