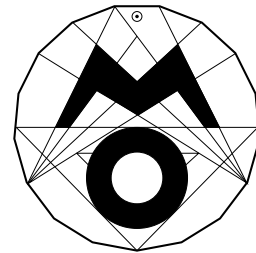


55. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 1. Tag



© 2015 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551231

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, b mit

$$\binom{ab+1}{2} = 2ab(a+b).$$

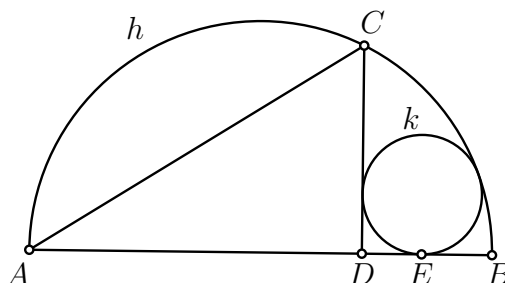
Hinweis: Für positive ganze Zahlen n, k ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}.$$

551232

Die Strecke \overline{AB} ist der Durchmesser eines Halbkreises h . Auf diesem Halbkreis liegt der Punkt C , der verschieden von den Punkten A und B sein soll. Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Strecke \overline{AB} heißt D . Der Kreis k liegt außerhalb des Dreiecks ADC und berührt gleichzeitig den Halbkreis h und die Strecken \overline{AB} und \overline{CD} . Der Berührungspunkt des Kreises k mit der Strecke \overline{AB} ist der Punkt E , siehe Abbildung A 551232.

Man beweise, dass die Strecken \overline{AC} und \overline{AE} gleich lang sind.



A 551232

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551233

Eine bekannte Mathematikerfamilie hat drei Kinder namens *Antonia*, *Bernhard* und *Christian*. Jeden Abend muss eines der Kinder den Aufwasch erledigen. Eines Tages entschließt sich ihr Vater, in Abhängigkeit vom Betragen seiner Kinder in der vorausgegangenen Woche einen Aufwaschplan für die nächsten sieben Tage zu erstellen.

- a) Man bestimme die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen Antonia mindestens einmal an mindestens drei aufeinanderfolgenden Tagen aufwaschen muss.
- b) Man bestimme die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen es drei aufeinanderfolgende Tage gibt, in denen Antonia am ersten, Bernhard am zweiten und Christian am dritten Tag an der Reihe ist.