55. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551234

Gegeben seien zwei teilerfremde positive ganze Zahlen n und m. Man zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen k die folgenden Aussagen (1) und (2) äquivalent sind:

(1) $n+m$ ist Teiler von n^2+km^2.
(2) $n+m$ ist Teiler von $k+1$.

551235

Es seien x, y und z drei reelle Zahlen mit Summe 0. Keine der drei Zahlen sei größer als 1.

a) Man beweise, dass
$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \leq 9$$
gilt.

b) Für welche Werte von x, y und z tritt Gleichheit ein?

551236

Gegeben sind eine Länge ℓ sowie ein Winkel α, welcher den Scheitelpunkt S hat und der größer als 0°, aber kleiner als 180° ist. Der Punkt A bewegt sich auf dem einen Schenkel des Winkels α, der Punkt B auf dem anderen so, dass $|AS|+|SB|=\ell$ ist.

Man beweise, dass alle Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ durch ein und denselben Punkt gehen.