55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

550841

Eine Schulklasse möchte eine Klassenfeier machen.

a) Eine Gruppe von sechs Mädchen möchte auf einer geraden Sitzbank mit sechs Plätzen derart Platz nehmen, dass jedes Mädchen nur Freundinnen als Sitznachbarn hat. Ist dies immer möglich, wenn jedes der Mädchen in dieser Gruppe mindestens drei Freundinnen hat?

b) Eine andere Gruppe von sieben Mädchen möchte an einem runden Tisch mit sieben Plätzen derart Platz nehmen, dass jedes Mädchen nur Freundinnen als Sitznachbarn hat. Ist dies immer möglich, wenn jedes der Mädchen in dieser Gruppe mindestens drei Freundinnen hat?

Hinweis: Die eigene Person wird bei Freundschaften nicht mitgezählt. Freundschaft wird hier als symmetrische Beziehung betrachtet: Wenn A mit B befreundet ist, dann auch B mit A.

550842

Ein Mathe-Floh sitzt im Ursprung $(0, 0)$ eines ebenen Koordinatensystems und will von Gitterpunkt zu Gitterpunkt springen. Gitterpunkte sind genau diejenigen Punkte (m, n) mit ganzzahligen Koordinaten m und n. Der Mathe-Floh kann nur zwei verschiedene Sprünge machen:
Sprung A: Um 1 nach rechts und um 3 nach oben.
Sprung B: Um 2 nach links und um 4 nach unten.

a) Untersuche, ob der Mathe-Floh von seinem Startpunkt $(0, 0)$ zum Punkt $(20, 16)$ gelangen kann. Falls das möglich ist, gib an, wie er dazu springen muss. Falls nicht, begründe, warum das unmöglich ist.

b) Untersuche, ob der Mathe-Floh von seinem Startpunkt $(0, 0)$ zum Punkt $(6, 2016)$ gelangen kann. Falls das möglich ist, gib an, wie er dazu springen muss. Falls nicht, begründe, warum das unmöglich ist.

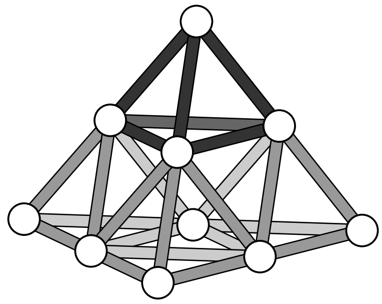
c) Untersuche, zu welchen Punkten (m, n) der Mathe-Floh von seinem Startpunkt $(0, 0)$ aus gelangen kann. Gib dafür ein leicht nachprüfbares hinreichendes und notwendiges Kriterium an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550843

Jana hat ein Magnetspiel mit 500 gleich langen Stabmagneten und 100 gleich großen Eisenkugeln. Die Verbindung von Stabmagneten kann nur über dazwischenliegende Eisenkugeln erfolgen. Die Kugeln können nicht aneinander befestigt werden.

Jana möchte Modelle von regelmäßigen Tetraedern bauen. Tetraeder sind Vierflächner, also geometrische Körper mit vier Seitenflächen. Ein solches Tetraeder heißt regelmäßig, wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.



A 550843

An der „Spitze" des Tetraeder-Modells soll sich eine Kugel befinden. Von dieser aus wird das Tetraeder-Modell etagenweise aufgebaut.

Die erste Etage bildet zusammen mit der „Spitze" ein regelmäßiges Tetraeder-Modell aus vier Kugeln und sechs Stabmagneten. Die erste Etage ist in der Abbildung A 550843 mit dunkelgrauen Stabmagneten und weißen Kugeln dargestellt.

Die n-te Etage bildet zusammen mit den vorherigen Etagen und der Spitze ein regelmäßiges Tetraeder-Modell, dessen Kanten aus jeweils n Stabmagneten und den Verbindungskugeln dieser Stabmagneten bestehen. Die Verbindungskugeln in den Kanten der jeweiligen Grundfläche werden außerdem jeweils durch genau zwei Stabmagneten mit den beiden nächstgelegenen Kugeln in der nächsthöheren Ebene verbunden. Die Grundfläche der n-ten Etage wird anschließend wie die anderen drei Seitenflächen aufgebaut. Enthält schließlich die Grundfläche Kugeln, welche nicht auf den Kanten des Tetraeder-Modells liegen, so werden diese jeweils durch drei Stabmagneten mit den drei nächstgelegenen Kugeln in der nächsthöheren Ebene verbunden.

In der Abbildung A 550843 ist ein Tetraeder-Modell mit zwei Etagen dargestellt, wobei die zweite Etage mit hellgrauen Stabmagneten und weißen Kugeln gebaut wurde.

a) Es sei s_n die Anzahl der Stabmagneten, die für die n-te Etage eines solchen Tetraeder-Modells benötigt werden.

   Beweise, dass $s_n = 3n^2 + 3n$ für $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ gilt.

b) Berechne die Anzahl der Etagen des größten solchen Tetraeder-Modells, das Jana mit diesem Magnetspiel bauen kann.