55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

550941

Eine Menge von 12 ganzen Zahlen, in der genau 6 Zahlen Primzahlen (P), genau 9 Zahlen ungerade (U), genau 10 Zahlen nicht negativ (N) und genau 7 Zahlen größer als 10 (Z) sind, bezeichnen wir als *PUNZ-Menge*.

a) Geben Sie ein Beispiel einer solchen PUNZ-Menge an und zeigen Sie, dass Ihr Beispiel die geforderten Eigenschaften hat.

b) In jeder PUNZ-Menge gibt es Zahlen, die alle vier Eigenschaften besitzen, die also gleichzeitig Primzahl, ungerade, nicht negativ und größer als 10 sind.
Bestimmen Sie (mit Begründung) eine PUNZ-Menge, die die minimal mögliche Anzahl solcher Zahlen enthält.

Hinweis: Eine *Primzahl* ist eine ganze Zahl $p > 1$, die genau zwei positive ganze Teiler besitzt, nämlich 1 und p.

550942

Ermitteln Sie alle Tripel ganzer Zahlen (a, b, c), die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^3 + b^3 = c^3 + 1\,, \qquad (1)$$

$$b^2 - a^2 = a + b\,, \qquad (2)$$

$$2\,a^3 - 6\,a = c^3 - 4\,a^2\,. \qquad (3)$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550943

Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein innerer Punkt P. Weiter seien D der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch P mit der Geraden BC, E der Schnittpunkt der Parallelen zu BC durch P mit der Geraden AC und F der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch P mit der Geraden AB.

Zeigen Sie, dass stets

$$\frac{|AF|}{|AB|} + \frac{|BD|}{|BC|} + \frac{|CE|}{|CA|} = 1$$

gilt.