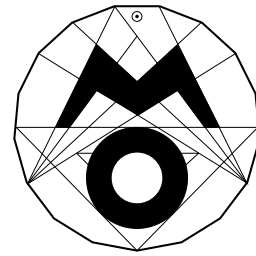


55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551044

Aus einer dreistelligen Zahl a_1 als Startzahl erhält man eine Folge von natürlichen Zahlen, indem zu jedem Folgenglied a_k , $k \geq 1$, das Doppelte seiner Quersumme $Q(a_k)$ addiert wird, um die nächste Zahl der Folge zu erhalten:

$$a_{k+1} = a_k + 2 \cdot Q(a_k).$$

Startet man zum Beispiel mit der Zahl $a_1 = 358$, so lautet der Anfang der Folge

$$a_1 = 358, a_2 = 358 + 2 \cdot 16 = 390, a_3 = 390 + 2 \cdot 12 = 414, a_4 = 414 + 2 \cdot 9 = 432, \dots$$

- Weisen Sie nach, dass es keine dreistellige Startzahl gibt, deren Folge die Zahl 2015 enthält.
- Weisen Sie nach, dass es keine dreistellige Startzahl gibt, deren Folge die Zahl 2016 enthält.

551045

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Ferner sei P ein innerer Punkt des Trapezes derart, dass $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle DPA|$ gilt.

Zeigen Sie, dass sich die Umkreise der Dreiecke ABP und CDP berühren.

551046

Man bestimme alle reellen Zahlen x , welche die Gleichung

$$\sqrt{x^2 - 7x + 3} + \sqrt{4x^2 + 5x - 3} = \sqrt{2x^2 - 5x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x - 2} \quad (1)$$

erfüllen.

Hinweis: Damit die Gleichung gelten kann, müssen insbesondere alle Wurzeln definiert, die Radikanden also nichtnegativ sein.