

55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Aufgaben – 1. Tag



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551141

Man bestimme alle Paare reeller Zahlen (a, b) , die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 25, \\ 3(a + b) - ab &= 15\end{aligned}$$

erfüllen.

551142

Eine bekannte Mathematikerfamilie hat drei Kinder namens *Antonia*, *Bernhard* und *Christian*. Jeden Abend muss eines der Kinder den Aufwasch erledigen. Eines Tages entschließt sich ihr Vater, in Abhängigkeit vom Betragen seiner Kinder in den vorausgegangenen Wochen einen Aufwaschplan für die nächsten 55 Tage zu erstellen.

Es bezeichne x die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen Antonia mindestens einmal an zwei aufeinanderfolgenden Tagen an der Reihe ist. Ferner bezeichne y die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen es zwei aufeinanderfolgende Tage gibt, an deren erstem Antonia und an deren zweitem Bernhard an der Reihe ist.

Man entscheide, ob x und y verschieden sind und welche dieser beiden Zahlen gegebenenfalls größer ist.

551143

Im nicht gleichschenkligen Dreieck ABC ist der Punkt I_a der Mittelpunkt des Ankreises, der dem Punkt A gegenüberliegt. Der Punkt M liegt symmetrisch zum Punkt I_a bezüglich der Geraden BC .

Man beweise, dass die Gerade AM parallel ist zu der Geraden, die durch den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt des Dreiecks I_aCB geht.

Hinweis: Unter einem Ankreis eines Dreiecks versteht man einen Kreis, der genau eine Seite dieses Dreiecks sowie die Geraden berührt, auf denen die beiden anderen Seiten liegen.