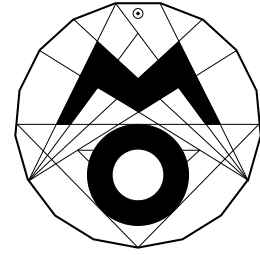


**55. Mathematik-Olympiade**  
**4. Stufe (Bundesrunde)**  
**Olympiadeklasse 12**  
**Aufgaben – 1. Tag**



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551241

Man bestimme alle Paare reeller Zahlen  $(a, b)$ , die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 25, \\ 3(a + b) - ab &= 15\end{aligned}$$

erfüllen.

551242

Eine bekannte Mathematikerfamilie hat drei Kinder namens *Antonia*, *Bernhard* und *Christian*. Jeden Abend muss eines der Kinder den Aufwasch erledigen. Eines Tages entschließt sich ihr Vater, in Abhängigkeit vom Betragen seiner Kinder in den vorausgegangenen Wochen einen Aufwaschplan für die nächsten 55 Tage zu erstellen.

Es bezeichne  $x$  die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen Antonia mindestens einmal an drei aufeinanderfolgenden Tagen an der Reihe ist. Ferner bezeichne  $y$  die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen es drei aufeinanderfolgende Tage gibt, an deren erstem Antonia, an deren zweitem Bernhard und an deren drittem Christian an der Reihe ist.

Man entscheide, ob  $x$  und  $y$  verschieden sind und welche dieser beiden Zahlen gegebenenfalls größer ist.

551243

Im nicht gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  ist der Punkt  $I_a$  der Mittelpunkt des Ankreises, der dem Punkt  $A$  gegenüberliegt. Der Punkt  $M$  liegt symmetrisch zum Punkt  $I_a$  bezüglich der Geraden  $BC$ .

Man beweise, dass die Gerade  $AM$  parallel ist zu der Geraden, die durch den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $I_aCB$  geht.

*Hinweis:* Unter einem Ankreis eines Dreiecks versteht man einen Kreis, der genau eine Seite dieses Dreiecks sowie die Geraden berührt, auf denen die beiden anderen Seiten liegen.