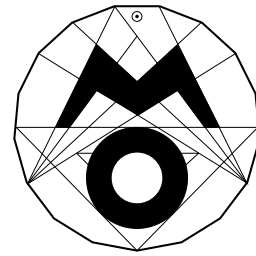


55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Aufgaben – 2. Tag



© 2016 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

551244

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m \leq 2n$, die die Gleichung

$$m \cdot \binom{2n}{n} = \binom{m^2}{2}$$

erfüllen.

Hinweis: Für positive ganze Zahlen n, k ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}.$$

551245

Die Punkte A, B, C, D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit dem Radius r . Es gelte $|AB| = |BC| = |CD| = s$ und $|AD| = s + r$.

Man ermittle alle möglichen Größen der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$.

551246

Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_6 + x_4x_5x_7 + x_5x_6x_1 + x_6x_7x_2 + x_7x_1x_3$$

für nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, \dots, x_7 mit Summe 1. Man zeige, dass $f(x_1, x_2, \dots, x_7)$ einen maximalen Wert annimmt, und bestimme diesen.