56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561211

Man bestimme alle reellen Zahlen x, y, die das Gleichungssystem

$$\sqrt{x-2016}+\sqrt{y-56}=11\,, \tag{1}$$

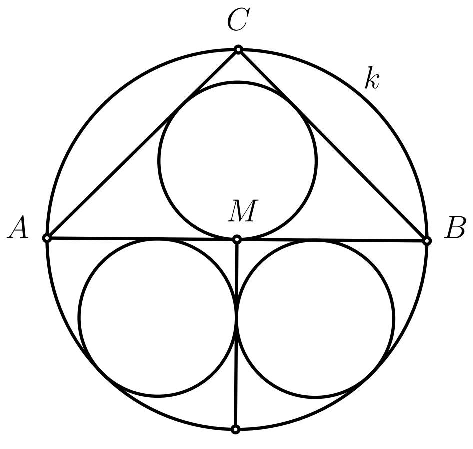
$$x+y=2193 \tag{2}$$

erfüllen.

561212

Im Kreis k sind M der Mittelpunkt, die Strecke $\overline{AB}$ ein Durchmesser und C ein Punkt auf der Kreislinie, der von A und von B verschieden ist. Das Dreieck ABC ist außerdem gleichschenklig. Der Radius $\overline{MD}$ steht außerhalb des Dreiecks ABC auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ senkrecht; siehe Abbildung A 561212.

Man beweise, dass der Inkreis des Dreiecks ABC und die Kreise, die den Durchmesser $\overline{AB}$, den Radius $\overline{MD}$ und den Kreis k berühren, gleichen Radius haben.



A 561212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

561213

In der Eisdiele „Parabolo“ gibt es als Attraktion das Eis in Waffeln einer besonderen Form. Diese entsteht, indem der Graph der Parabel $y = ax^2$ mit $a > 0$ um die y-Achse rotiert wird. Der Betreiber möchte eine Eiskugel so in die Waffel füllen, dass sie diese im tiefsten Punkt berührt.

Man ermittle alle möglichen Radien der Eiskugel in Abhängigkeit vom Parameter a.

561214

Wir betrachten alle möglichen Pflasterungen eines 8×8-Schachbretts durch 2×1-Dominosteine.

a) Man zeige, dass die Gesamtanzahl aller Pflasterungen gerade ist.

b) Man zeige, dass jede Pflasterung ein 2×2-Quadrat aus zwei Dominosteinen enthält.

c) Es sei ein *Zug* der Vorgang, bei dem man in einem solchen 2×2-Quadrat die Steine um $90°$ dreht. Man zeige, dass jede Pflasterung in jede andere durch eine Folge von Zügen überführt werden kann.

Bemerkung: Eine Pflasterung ist eine vollständige Überdeckung durch sich nicht überlappende (Domino-)Steine. Dabei ist die Lage des Schachbrettes fest vorgegeben, und eine Pflasterung wird durch die Lage aller Dominosteine bezogen auf die Felder des Schachbrettes festgelegt. Insbesondere sollen auch Pflasterungen, die sich durch eine Drehung oder Spiegelung des gesamten Schachbretts ineinander überführen lassen, als verschieden gelten.