56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 5
Lösungen

© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

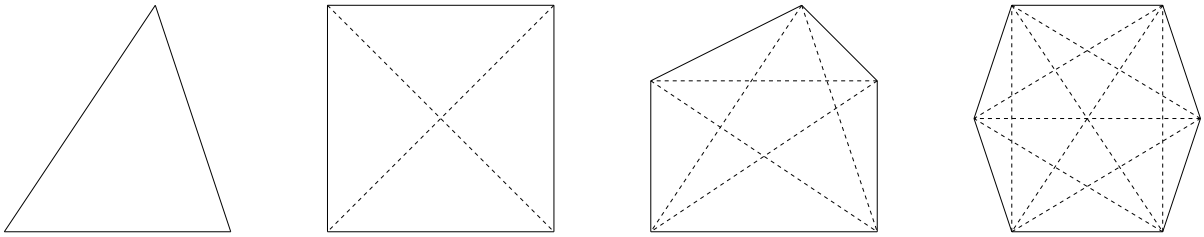
560511 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Ein Dreieck hat 0 Diagonalen.

Teil b) Ein Viereck hat 2 Diagonalen.

Teil c) Ein Fünfeck hat 5 Diagonalen.

Teil d) Ein Sechseck hat 9 Diagonalen.



0 Diagonalen 2 Diagonalen 5 Diagonalen 9 Diagonalen

Teil e) Ein Vierzehneck hat 77 Diagonalen, denn:

Jeder Eckpunkt hat zwei benachbarte Eckpunkte. Folglich ist jeder Eckpunkt mit $(14-3=)\,11$ anderen Eckpunkten durch eine Diagonale verbunden. Zählt man von jedem Eckpunkt aus die Diagonalen, dann wird jede Diagonale doppelt gezählt. Es gibt deshalb $(14 \cdot 11 : 2 =)\,77$ Diagonalen.

Hinweis für Arbeitsgemeinschaften: Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks mit d, dann gilt $d = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$.

Auf diese Weise kann man die Folge der Anzahlen der Diagonalen für $n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ berechnen: $d(n) = 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, \ldots$

Bei dieser Folge kann man eine interessante Gesetzmäßigkeit hinsichtlich der Differenz aufeinanderfolgender Glieder erkennen:

$$0+2=2,\ 2+3=5,\ 5+4=9,\ 9+5=14,\ 14+6=20,\ 20+7=27,\ \ldots$$

560512 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

$$82 \to 41 \to 44 \to 22 \to 11 \to 14 \to 7 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

als Folge geschrieben: 82, 41, 44, 22, 11, 14, 7, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

$$83 \to 86 \to 43 \to 46 \to 23 \to 26 \to 13 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

als Folge geschrieben: 83, 86, 43, 46, 23, 26, 13, 16, 8, 4, 2, 1.

$$84 \to 42 \to 21 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 6 \to 3 \to \cdots,$$

als Folge geschrieben: 84, 42, 21, 24, 12, 6, 3, 6, 3, ...

Teil b) Alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind, führen zum Schluss auf die „Endlosschleife“ $6 \to 3 \to \cdots$

Hinweis: Eine Begründung wird nicht verlangt, ist aber durchaus einzusehen – wenn eine Zahl durch 3 teilbar und ungerade ist, ist die nächste Zahl um drei größer, deswegen weiterhin durch 3 teilbar und gerade. Die nächste Zahl ist kleiner und weiterhin durch 3 teilbar.

Dieser Prozess verkleinert also letztlich die Zahlen, behält aber die Teilbarkeit durch 3 bei und führt so auf die 3. Da aber dann durch die Addition von 3 die Zahl auf 6 verdoppelt wird, bleibt man in der erwähnten Schleife.

<u>560513 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a)

	3	**7**	8	6
+	**4**	2	**5**	7
	8	0	4	**3**

Teil b)

7	**3**	**4**	·	5	3	8
	3	**6**	**7**	**0**		
		2	2	0	2	
			5	**8**	**7**	**2**
	3	**9**	**4**	**8**	**9**	**2**

Teil d)

1	**1**	1	·	**1**	2	**1**
		1	**1**	1		
			2	2	**2**	
				1	**1**	**1**
		1	**3**	4	3	1

Teil c)

	3	**1**	2
+	**7**	3	**5**
1	**0**	4	7

	3	**1**	2
+	**8**	3	**5**
1	**1**	4	7

	3	**1**	2
+	**9**	3	**5**
1	**2**	4	7

Bemerkungen zur Lösungsfindung für die einzelnen Teilaufgaben:

Teil a) Die fehlenden Ziffern können unmittelbar bestimmt werden.

Teil b) Der erste Faktor des Produkts kann mit Hilfe der zweiten Multiplikationszeile ermittelt werden, indem die zweite Multiplikationszeile durch den Zehner des zweiten Faktors dividiert wird, also $2202 : 3 = 734$.

Die erste und die dritte Multiplikationszeile wie auch die abschließende Summe kann unmittelbar berechnet werden.

Teil c) Auch hier können die fehlenden Ziffern an der Einer- und Zehnerstelle unmittelbar bestimmt werden. Jedoch sind die Ziffern der Hunderterstelle nicht eindeutig zu ermitteln. Hier gibt es drei Möglichkeiten: Die Hunderterstelle des zweiten Summanden muss, um den Zehnerübertrag zu erhalten, mindestens 7 und kann höchstens 9 sein.

Teil d) Zunächst ermittelt man den Einer der zweiten Multiplikationszeile. Dieser ergibt sich als Produkt des Zehners des zweiten Faktors mit dem Einer des ersten Faktors, also $1 \cdot 2 = 2$.

Der erste Faktor lässt sich als Quotient der zweiten Multiplikationszeile mit dem Zehner des zweiten Faktors berechnen, also $222 : 2 = 111$. Nun kann mittels Differenzbildung die dritte Multiplikationszeile berechnet werden. Schließlich wird der Hunderter des zweiten Faktors ermittelt, dazu muss der Einer der ersten Multiplikationszeile durch den Einer des ersten Faktors dividiert werden, also $1 : 1 = 1$. Die fehlenden Ziffern lassen sich dann unmittelbar berechnen.

<u>560514 Lösung</u> *10 Punkte*

Die Anzahl der blauen, grünen, roten und violetten Buntstifte werde durch b, g, r und v beschrieben. Gemäß der Aufgabenstellung gilt:

(1) $b + g + r + v = 20$ und $b,\ g,\ r,\ v \geq 1$
(2) $r = v$
(3) $b > r$
(4) $g < r$

Aus (2) bis (4) folgt, dass die Anzahl der grünen Buntstifte am kleinsten und die der blauen am größten ist. Außerdem muss es mindestens zwei rote bzw. violette Buntstifte geben. Somit kann man mit einem grünen Buntstift beginnend, unter Berücksichtigung der Bedingungen, die 11 gesuchten Möglichkeiten finden.

g	**r, v**	$\mathbf{b = 20 - (g + r + v)}$	**Bedingungen erfüllt?**
1	2	$(20 - (1 + 2 + 2) =)\ 15$	ja
1	3	$(20 - (1 + 3 + 3) =)\ 13$	ja
1	4	$(20 - (1 + 4 + 4) =)\ 11$	ja
1	5	$(20 - (1 + 5 + 5) =)\ 9$	ja
1	6	$(20 - (1 + 6 + 6) =)\ 7$	ja
1	7	$(20 - (1 + 7 + 7) =)\ 5$	Bedingung (3) nicht
2	3	$(20 - (2 + 3 + 3) =)\ 12$	ja
2	4	$(20 - (2 + 4 + 4) =)\ 10$	ja
2	5	$(20 - (2 + 5 + 5) =)\ 8$	ja
2	6	$(20 - (2 + 6 + 6) =)\ 6$	Bedingung (3) nicht
3	4	$(20 - (3 + 4 + 4) =)\ 9$	ja
3	5	$(20 - (3 + 5 + 5) =)\ 7$	ja
3	6	$(20 - (3 + 6 + 6) =)\ 5$	Bedingung (3) nicht
4	5	$(20 - (4 + 5 + 5) =)\ 6$	ja
4	6	$(20 - (4 + 6 + 6) =)\ 4$	Bedingung (3) nicht
5	6	$(20 - (5 + 6 + 6) =)\ 3$	Bedingung (3) nicht

Diese Tabelle ist vollständig, da alle Möglichkeiten für g, r und v systematisch ausgeschöpft werden, deshalb enthält sie **alle** Möglichkeiten.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560511 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	1 Punkt
Teil b)	1 Punkt
Teil c)	1 Punkt
Teil d)	2 Punkte
Teil e)	5 Punkte

Aufgabe 560512 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	3 Punkte
Teil b)	7 Punkte

Aufgabe 560513 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	2 Punkte

Aufgabe 560514 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Korrekte Lösung mit Lösungsweg	10 Punkte