56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Lösungen

560611 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Teil b)

$$[1111]_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$
$$[10001]_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17$$

Teil c)

$$64 = 1 \cdot 2^6 = [1000000]_2$$

$$65 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^0 = [1000001]_2$$

$$66 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 = [1000010]_2$$

$$67 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = [1000011]_2$$

$$68 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 = [1000100]_2$$

$$69 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = [1000101]_2$$

Teil d)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1\,0 \\ +\quad 1\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \end{array}$$

Teil e)

$$\begin{array}{l} 1\,1\,0\,1\,0\,1 \cdot 1\,0\,1\,0 \\ \hline \quad\;\; 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \qquad\qquad 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \hline \;\;\; 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

Hinweis für Arbeitsgemeinschaften: Dualzahlen können schriftlich wie Zahlen im Dezimalsystem multipliziert werden. Dabei werden die Ziffern des linken Faktors von links nach rechts jeweils mit den Ziffern des rechten Faktors multipliziert. Im Anschluss werden die so entstandenen Multiplikationszeilen addiert. Hierbei ist zu beachten, dass der Übertrag schon bei 2 und nicht erst bei 10 wie im Dezimalsystem erfolgt.

560612 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Zum Beispiel:

$$77 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

$$83 \to 86 \to 43 \to 46 \to 23 \to 26 \to 13 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

$$82 \to 41 \to 44 \to 22 \to 11 \to 14 \to 7 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Aber:

$$87 \to 90 \to 45 \to 48 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 6 \to 3 \cdots$$

Teil b) Alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind, führen zum Schluss auf die „Endlosschleife“ $6 \to 3 \to 6 \cdots$

Hinweis: Eine Begründung wird nicht verlangt, ist aber durchaus einzusehen: Zunächst kann man feststellen, dass für Startzahlen oder nach einem Spielzug erreichte Zahlen $z \geq 4$ die nächste oder die übernächste Zahl kleiner als z werden muss. Deshalb führt diese Folge irgendwann auf die Zahlen 3 oder 2. Bei 2 erhält man im nächsten Schritt die 1, bei 3 die Schleife $6 \to 3 \to 6 \cdots$. Schließlich kann man begründen, dass man die 3 genau dann erhält, wenn die Startzahl bereits durch 3 teilbar ist. Durch Addition von 3 oder durch Division durch 2 entsteht aus einer durch 3 teilbaren Zahl stets wieder eine durch 3 teilbare Zahl. Ebenso kann durch Addition von 3 oder durch Division durch 2 aus einer nicht durch 3 teilbaren Zahl keine durch 3 teilbare Zahl entstehen.

Teil c) Zunächst kann man zeigen, dass für jede Startzahl oder nach einem Spielzug erreichte Zahl $z \geq 6$ die nächste oder die übernächste Zahl kleiner als z werden muss: Ist z gerade, dann ist die nächste Zahl kleiner als z. Ist $z \geq 6$ ungerade, dann wird maximal 5 addiert und mit der nachfolgenden Division durch 2 ist die übernächste Zahl kleiner als z.

Deshalb erreicht man in diesem Spiel immer eine Zahl, die kleiner als 6 ist. Für diese Fälle lauten die letzten Spielzüge:

$$5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

$$4 \to 2 \to 1$$

$$3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

$$2 \to 1$$

Man erreicht demnach immer die Zahl 1.

560613 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

Größter Geldbetrag:

$$27{,}60\,€ = 1 \cdot 1\,\text{ct} + 2 \cdot 2\,\text{ct} + 3 \cdot 5\,\text{ct} + 4 \cdot 10\,\text{ct} + 5 \cdot 20\,\text{ct} + 6 \cdot 50\,\text{ct} + 7 \cdot 1\,€ + 8 \cdot 2\,€$$

Kleinster Geldbetrag:

$$7{,}32\,€ = 8 \cdot 1\,\text{ct} + 7 \cdot 2\,\text{ct} + 6 \cdot 5\,\text{ct} + 5 \cdot 10\,\text{ct} + 4 \cdot 20\,\text{ct} + 3 \cdot 50\,\text{ct} + 2 \cdot 1\,€ + 1 \cdot 2\,€$$

Teil b) Ja, beides ist möglich:

$$7,33\,€ = 7 \cdot 1\,\text{ct} + 8 \cdot 2\,\text{ct} + 6 \cdot 5\,\text{ct} + 5 \cdot 10\,\text{ct} + 4 \cdot 20\,\text{ct} + 3 \cdot 50\,\text{ct} + 2 \cdot 1\,€ + 1 \cdot 2\,€$$

$$27,59\,€ = 2 \cdot 1\,\text{ct} + 1 \cdot 2\,\text{ct} + 3 \cdot 5\,\text{ct} + 4 \cdot 10\,\text{ct} + 5 \cdot 20\,\text{ct} + 6 \cdot 50\,\text{ct} + 7 \cdot 1\,€ + 8 \cdot 2\,€$$

Teil c) Die kleinsten Veränderungen der Geldbeträge erhält man durch Vertauschen der Anzahlen von Münzen, die in der Reihenfolge nebeneinander stehen. Ein Vertauschen der Anzahlen bei den 1-ct- und 2-ct-Münzen führt zu einer Veränderung des Geldbetrages um ein Cent. Die nächstgrößere Veränderung des Geldbetrages erhält man durch Vertauschen der Anzahlen bei den 2-ct- und 5-ct-Münzen. Diese Veränderung beträgt aber bereits drei Cent. Folglich ist eine Veränderung um zwei Cent nicht möglich.

560614 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Klasse hat zwei Wahlmöglichkeiten für einen Läufer, drei für einen Schwimmer und nochmals drei Möglichkeiten für einen Radfahrer. Da jede Möglichkeit für die Wahl in einer Sportart mit jeder Möglichkeit in den anderen Sportarten kombiniert werden kann, ergeben sich insgesamt $(2 \cdot 3 \cdot 3 =)\,18$ Möglichkeiten für das Aufstellen einer Mannschaft.

Teil b) Nachdem die erste Mannschaft gebildet worden ist, bleiben für die zweite Mannschaft noch ein Läufer, zwei Schwimmer und zwei Radfahrer zur Auswahl. Für das Zusammenstellen der zweiten Mannschaft hat die Klasse also $(1 \cdot 2 \cdot 2 =)\,4$ verschiedene Möglichkeiten.

Daher ergeben sich für das Aufstellen der Mannschaften 1 und 2 insgesamt $(18 \cdot 4 =)\,72$ verschiedene Möglichkeiten.

Teil c)

1. Fall: Nico und Victor starten in derselben Mannschaft, nämlich in Mannschaft 1. In dieser Mannschaft stehen deswegen der Schwimmer und der Radfahrer fest, und es bleiben noch zwei Möglichkeiten für die Wahl eines Läufers. Also gibt es zwei Möglichkeiten für Mannschaft 1. Für das Bilden von Mannschaft 2 bleiben ein Läufer, zwei Schwimmer und zwei Radfahrer zur Auswahl, und es gibt daher $(1 \cdot 2 \cdot 2 =)\,4$ Möglichkeiten.

Hieraus folgt, dass es für diesen Fall $(2 \cdot 4 =)\,8$ Möglichkeiten gibt.

2. Fall: Nico und Victor starten in derselben Mannschaft, nämlich in Mannschaft 2. Dafür gibt es wieder 8 Möglichkeiten, denn es kann in jeder Mannschaftsaufstellung des 1. Falles die Zuordnung zu den Mannschaften getauscht werden.

3. Fall: Nico und Victor starten gar nicht. Es bleiben demnach zwei Läufer, zwei Schwimmer und zwei Radfahrer zur Auswahl. Folglich ergeben sich $(2 \cdot 2 \cdot 2 =)\,8$ Möglichkeiten für das Zusammenstellen der ersten Mannschaft. Die zweite Mannschaft wird automatisch aus den verbliebenen Schülern gebildet. Für den 3. Fall ergeben sich also auch 8 Möglichkeiten.

Da nun jeder der drei Fälle eintreten kann, gibt es insgesamt $(8 + 8 + 8 =)\,24$ Möglichkeiten, die Mannschaften zusammenzustellen.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560611	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	2 Punkte
Teil e)	2 Punkte

Aufgabe 560612	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 560613	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 560614	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte